



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTÍNUOS Y TEORÍA DE
ESTRUCTURAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS
SÁNDWICH

Autor: Álvaro Javier González Gijón

Tutor: Prof. Dr. D. Enrique Barbero Pozuelo

Titulación: Grado en Ingeniería Mecánica

Leganés, 2013

A la memoria de Laura González Gijón.

AGRADECIMIENTOS

A la universidad Carlos III de Madrid, por hacer posible mi formación y la de tantos otros.

Al profesor Enrique Barbero, por su dedicación, paciencia y guía durante la realización de éste trabajo.

A todos mis compañeros y amigos, que durante la carrera y la realización de este trabajo han mostrado su apoyo, especialmente a:

Jaime Lorenzo Trueba, quien me ha prestado su ayuda cuando más la he necesitado, sin la que este trabajo no sería lo que ha llegado a ser.

Javier López Carrillo, por sus ideas y su empuje, sin él no habría sido capaz de llegar hasta aquí.

Alfredo Espejel Corvera, por presionarme para trabajar y por prestar su oído a mis incertidumbres.

Álvaro Fito y Víctor Cedillo, quienes han sido mis compañeros y amigos durante la carrera, y con quienes he sido capaz de disfrutar de la Ingeniería.

A Agustín, Mirai, Borja, Álvaro, Javi, Víctor, Tamara, Santiago, Chema, Sheyla, Yun, Álex, Joaquín, Carlos, Mitay, Fran, Fernando, Pablo y Roberto, quienes durante los momentos más difíciles han sabido estar para ayudarme a seguir adelante.

A mi familia, mis padres, mis hermanos, mis abuelos, mis tíos y mis primos. Especialmente a mi hermana Laura, gracias a quien he llegado a ser el hombre que soy ahora.

A Leticia, por tus noches, por tu sonrisa, y por darme algo por lo que merece la pena luchar.

RESUMEN

En este Trabajo de Fin de Grado se ha estudiado el comportamiento dinámico a flexión de una viga biapoyada tipo sándwich ante esfuerzos variables con el tiempo, este tipo de material se utiliza en las industrias de la construcción, aeronáutica, y de refrigeración.

Para la realización del estudio se han tenido en cuenta resultados experimentales obtenidos en el laboratorio del departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid, mediante la utilización una probeta tipo sándwich compuesta por dos láminas compuestas por láminas de fibra de vidrio clase E y resina de polyester AROPOL FS6902, con un espesor de 3mm. Y un núcleo de foam PVC de espesor 30mm. Y una máquina para ensayos de flexión a tres puntos. Estos ensayos de flexión en tres puntos se han realizado en condiciones ambientales de temperatura y humedad.

El trabajo consiste en el análisis de la respuesta dinámica de estructuras sándwich mediante la creación de un programa escrito en Matlab que sea capaz de calcular la respuesta de cualquier viga de tipo sándwich mediante el uso de las teorías de vibración, las teorías de laminado y simplificaciones para estructuras tipo sándwich, así como el concepto de integral de Duhamel.

Ha sido necesario filtrar tanto la respuesta como los datos de esfuerzo del indentador para eliminar el ruido presente y poder de ese modo comparar con mayor exactitud ambas respuestas en busca de posibles diferencias. Para ello ha sido necesario estimar frecuencias propias y modos propios de vibración.

Posteriormente se ha utilizado el programa mencionado para calcular la respuesta dinámica de distintas configuraciones de vigas tipo sándwich y su respuesta ante esfuerzos de distintas magnitudes, tiempos y formas de aplicación.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	4
1.3. Contenido	6
2. Estado del Arte	7
2.1. Introducción	8
2.2. Orígenes y Evolución	13
2.3. Teoría del Laminado	19
2.3.1. Conceptos básicos	19
2.3.2. Micromecánica de láminas unidireccionales	20
2.3.3. Micromecánica de Lámina	22
2.3.4. Teorías aplicadas a láminas sueltas	25

2.3.5.	Aplicación de teorías a un laminado	29
2.4.	Simplificaciones para Sándwich	40
2.4.1.	Consideraciones previas	40
2.4.2.	Cálculo de tensiones	42
2.4.3.	Cálculo de deformaciones	47
2.4.4.	Cálculo de movimientos	48
2.5.	Aplicación de la teoría de vibraciones	51
2.5.1.	Caso de viga doblemente apoyada	51
2.5.2.	cálculo de frecuencias y modos propios	52
2.5.3.	cálculo del resto de variables del problema	55
2.5.4.	cálculo de la integral de Duhamel	56
3.	Procedimiento Experimental	59
3.1.	Materiales	60
3.2.	Procedimiento del ensayo	64
3.3.	Resultados del ensayo	66
4.	Descripción de la solución	69

4.1. Problema inicial	70
4.1.1. Caracterización del problema	70
4.2. Solución del problema	72
4.2.1. Aplicando teorías estáticas	72
4.2.2. Aplicando teorías dinámicas	74
4.2.3. Filtrado de señales y respuesta	80
5. Resultados	82
5.1. Análisis de la sensibilidad modal	83
5.2. Estudio de la respuesta	84
5.3. Relevancia del análisis dinámico	86
5.4. Estudio paramétrico	89
5.4.1. Espesor de las pieles	90
5.4.2. Propiedades de las pieles	91
5.4.3. Espesor del núcleo	93
5.4.4. Distancia entre apoyos	94
5.4.5. Anchura de la viga	96

6. Conclusiones	98
7. Trabajo Futuro	101
8. Bibliografía	103
A. Anexo I : Código del programa	109
A.1. Definición de variables	110
A.2. Prelocalización de variables	113
A.3. Definición de esfuerzo seno para estudio paramétrico.	115
A.3.1. Definición de variable adicional para estudio paramétri-	
co.	115
A.4. Cálculo de constantes.	116
A.5. Análisis dinámico de la solución.	117
A.6. Análisis estático de la solución	120
A.6.1. Representación de gráficas.	120
B. Anexo II : Summary	121

Índice de figuras

2.1. Distintos tipos de elementos tipo sándwich	8
2.2. Elemento de Pala de Aerogenerador	9
2.3. Mástil del USS Radford, cuyo interior se encuentra formado por un núcleo de material antiradar	10
2.4. Cartón corrugado	10
2.5. distintos tipos de núcleo	11
2.6. Esquema de lámina unidireccional	19
2.7. Esquema del sistema de coordenadas empleado	25
2.8. Ejemplo de discordancia entre ejes locales y globales	27
2.9. Ejemplo de apilado de láminas	29
2.10. Distintos laminados	30
2.11. Sistema de coordenadas empleado	32

2.12. Descripción gráfica de desplazamientos y variables	32
2.13. Tensiones y deformaciones en un material laminado	34
2.14. Tensiones y deformaciones en un material isótropo	34
2.15. Esfuerzos planos en un material laminado	34
2.16. Momentos en un material isótropo	34
2.17. Esquema de laminado simétrico	39
2.18. Distribución real de esfuerzos en un sándwich	40
2.19. Deformación de un elemento diferencial tipo sándwich	41
2.20. Deformación aproximada de tensiones en un sándwich	42
2.21. Esfuerzos y coordenadas de una rebanada de sándwich	43
2.22. esquema del caso estudiado	44
2.23. distribución de tensiones de cortadura	45
2.24. Equilibrio de fuerzas en una rebanada	46
2.25. Desplazamientos inicial y genérico	49
2.26. Giros inicial y genérico	50
2.27. Viga doblemente apoyada	51

2.28. Función general de carga aproximada mediante impulsos . . .	56
3.1. Recipiente fabricado en laminado de fibra de vidrio y poliéster	60
3.2. Espuma FOAM	61
3.3. Resultados de los ensayos realizados al núcleo de foam . . .	62
3.4. Dimensiones de la probeta de flexión en tres puntos	64
3.5. Velocidad del impactador frente a tiempo	66
3.6. Desplazamiento del impactador frente a tiempo	67
3.7. Fuerza aplicada frente a tiempo	67
3.8. Energía frente a tiempo	68
4.1. Ensayo de flexión a tres puntos	70
4.2. Esfuerzo registrado en el laboratorio	71
4.3. Desplazamiento registrado en el laboratorio	72
4.4. Esquema del ensayo de flexión	73
4.5. Distribución estática de momentos	73
4.6. Función general de carga aproximada mediante impulsos . . .	79
5.1. Estudio de sensibilidad modal	83

5.2. Desplazamiento según análisis estático sin postfiltrado	84
5.3. Desplazamiento según análisis estático filtrado	85
5.4. Desplazamiento según análisis dinámico filtrado	86
5.5. Desplazamiento según análisis dinámico sin postfiltrado . . .	86
5.6. Comparación de resultados para desplazamiento según teorías estáticas y dinámicas	87
5.7. Desplazamiento provocado por fuerza seno	89
5.8. Sensibilidad del desplazamiento al espesor de las pieles . . .	90
5.9. Evolución del desplazamiento en función del módulo de Young aparente de las pieles	92
5.10. Comparación de desplazamientos en función del espesor del núcleo	93
5.11. Relevancia de la distancia entre apoyos en cuanto a despla- zamiento máximo	95
5.12. Estudio paramétrico de la influencia de la anchura de la viga	96

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El uso de las estructuras tipo sándwich crece rápidamente alrededor del globo. Sus muchas ventajas, el desarrollo de nuevos materiales y la necesidad de estructuras ligeras de gran exigencia mecánica aseguran que la demanda de este tipo de estructuras seguirá aumentando con los años. El rol de las estructuras tipo sándwich se ve enfatizado a causa de su gran ratio peso – resistencia, como resultado, la construcción de estructuras utilizando este tipo de material resulta en menores deformaciones laterales, mayor resistencia a pandeo y mayores frecuencias propias que otras construcciones. Por tanto, para ciertas condiciones mecánicas y ambientales, la construcción mediante el uso de estructuras de tipo sándwich resulta óptima. Aún con estas ventajas, es importante desarrollar medios que permitan optimizar la construcción mediante estructuras tipo sándwich para:

- Determinar los pesos mínimos necesarios para una geometría estructural dada.
- Comparar racionalmente distintos tipos de estructuras tipo sándwich.
- Enfrentar dichas estructuras con las más convencionales.
- Seleccionar los mejores materiales para las pieles y el núcleo.

- Elegir la mejor configuración para el laminado del material presente en las pieles.
- Comparar el peso óptimo de construcción con los pesos requeridos al estar presente algún tipo de restricción ajena a la física, como la disponibilidad de determinados materiales, etc.

Por tanto, contar con un programa informático capaz de prever el comportamiento de este tipo de estructuras simplemente implementando las propiedades de los materiales y el estado de carga que se prevé sufrirá puede ser muy útil, ya que de otro modo habría que calcularlo a mano o realizar ensayos en el laboratorio, y estos métodos requieren de mayor empleo de recursos.

1.2. Objetivos

El objetivo global de este trabajo de fin de grado es analizar la respuesta de una viga tipo sándwich sometida a cargas dinámicas. Para ello se va a emplear un modelo analítico que mediante la aplicación de las teorías del laminado, las simplificaciones para viga sándwich y las teorías de vibraciones sea capaz de calcular el desplazamiento vertical o flecha en cualquiera de los puntos de la viga objeto de estudio, teniendo en cuenta los efectos de las fuerzas de inercia. Dicho modelo analítico será programado en Matlab, lo que permitirá obtener resultados rápidamente en caso de que se desee modificar el valor de alguna de las variables. Se estudiará la respuesta de una viga tipo sándwich biapoyada ya que se cuenta con resultados de ensayos experimentales obtenidos en el laboratorio del Departamento de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid, y por tanto se podrán comparar los resultados obtenidos en el trabajo con los experimentales. Una vez se validen los resultados del modelo teórico, se realizarán varios estudios:

- Un estudio de sensibilidad de los resultados al número de modos de vibración, para conocer la cantidad de modos que es necesario tener en cuenta para obtener la respuesta en desplazamientos fiable.

- Un estudio de la influencia de las fuerzas de inercia en la respuesta de la viga frente a las cargas exteriores, variando el tiempo de aplicación de la fuerza y comparando los resultados obtenidos con los que se obtendrían aplicando ecuaciones que no consideren las fuerzas de inercia (ecuaciones estáticas).
- Un estudio paramétrico de la viga, variando diferentes parámetros de su estructura y comprobando cómo dicha variación afecta a la respuesta de la viga frente a cargas dinámicas.

Una vez obtenidos los resultados, se pretende llegar a unas conclusiones sobre los mismos y plantear posibles vías de trabajo futuro.

1.3. Contenido

El Trabajo se divide por tanto en seis partes, siendo la primera esta introducción. La segunda parte contiene una definición de las estructuras tipo sándwich, sus orígenes, usos más comunes, y las teorías tras este tipo de estructuras. En la tercera parte se describe el dispositivo experimental utilizado en el ensayo en el que se basa el programa, indicando la sistemática de los mismos. Durante la cuarta parte se describe el programa informático, presentando inicialmente la base teórica, las ecuaciones en que se fundamenta y como presenta sus resultados. La quinta parte trata sobre los resultados obtenidos mediante el programa, las distintas configuraciones de estructura analizadas y compara los resultados con los experimentales en los casos en los que se cuenta con ellos. En la sexta parte se analizan los resultados obtenidos, presentando las principales conclusiones. Por último, en la séptima parte se plantean posibles líneas de trabajo a tener en cuenta. Finalmente se presenta la bibliografía.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Introducción

Una estructura tipo sándwich normalmente consiste en dos “pieles”, generalmente compuestas por un material rígido y resistente relativamente denso, como el metal o los materiales compuestos de fibra, unidas a una pieza ancha y ligera de material llamado “núcleo”. Este concepto imita al de una viga en “doble T”, pero en dos dimensiones, donde las pieles soportan las cargas de flexión, y el núcleo transmite el esfuerzo cortante entre ambas pieles. En la figura 2.1 se ilustran elementos estructurales tipo sándwich de tipo plano y curvado.

Las estructuras tipo sándwich permiten la optimización de estructuras cuya condición limitante es el peso, como algunas piezas de aeroplanos, estructuras espaciales, elementos deportivos, estructuras navales, o palas de aerogeneradores. Ver figura 2.2

A parte de proveer una forma eficiente de estructura portante, el concepto

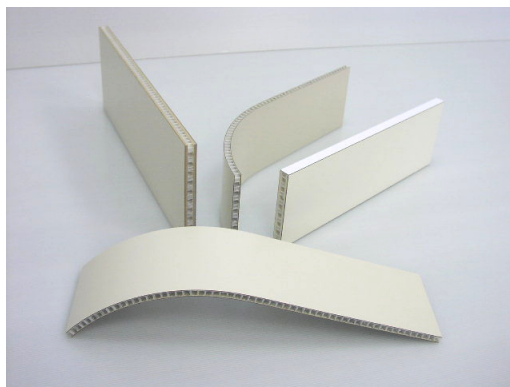


Figura 2.1: Distintos tipos de elementos tipo sándwich



Figura 2.3: Mástil del USS Radford, cuyo interior se encuentra formado por un núcleo de material antiradar



Figura 2.4: Cartón corrugado

núcleo celular es el de aquel compuesto por pequeñas celdas entre las que hay espacio abierto, cerradas por paredes de forma repetitiva, a modo de panal, hasta que el núcleo queda completamente lleno. Los núcleos celulares, como las espumas o “foams” poliméricas y metálicas, los núcleos en panal de abeja, y la madera de balsa, son muy comunes en aplicaciones estructurales. En la figura 2.5 se pueden observar algunos de los distintos tipos de núcleo.

El núcleo de red es un núcleo estructural que consiste en una red hecha de un material sólido formado de tal manera que separa ambas pieles transmitiendo de forma efectiva todo esfuerzo cortante. Como los materiales del núcleo son ligeros, y la rigidez y la resistencia de los materiales aumentan con su densidad (Gibson y Ashby, 1997), el núcleo es normalmente la parte débil del sándwich. En algunas configuraciones, la unión entre pieles y núcleo es crítica para la integridad del sándwich. Para escoger adecuadamente los materiales constituyentes de tanto pieles como núcleo es necesario comprender la mecánica subyacente a las estructuras tipo sándwich. En este capítulo se

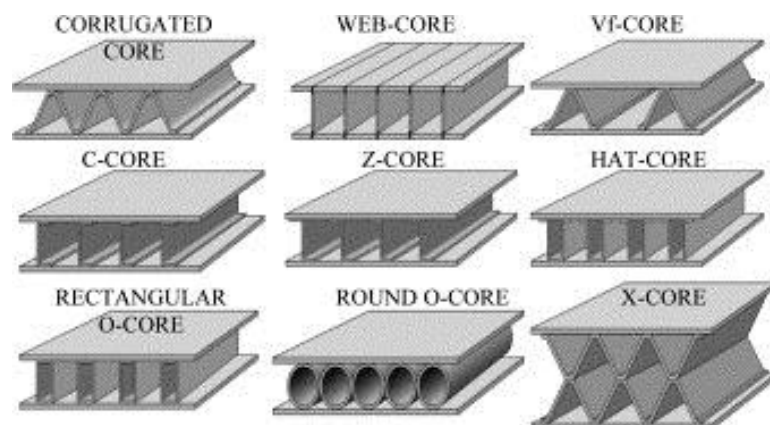


Figura 2.5: distintos tipos de núcleo

hablará sobre algunos de los estados de carga más básicos y los modos de falla más comunes de las estructuras tipo sándwich. La comprensión de la contribución de las pieles y el núcleo es esencial para elegir los materiales de los que se formará, y de este modo poder diseñar una estructura fiable y eficiente. Prácticamente sin excepción, las estructuras tipo sándwich utilizan paneles lisos o curvados, como muestra la figura 1. Aun así se puede aprender mucho del empleo de estructuras más simples, como las vigas, que serán el tipo de elementos utilizados en este trabajo de fin de grado.

2.2. Orígenes y Evolución

La construcción mediante estructuras tipo sándwich es relativamente nueva, Noor, Burton y Bert afirman que el concepto se remonta a Fairbairn en 1849. Sin embargo Feichtinger asegura que el concepto de construcción mediante estructuras tipo sándwich se originó en los estados unidos durante la segunda guerra mundial, empezando con el uso de elementos de este tipo en los que las pieles eran constituidas por plástico reforzado, y el núcleo de plástico de una densidad mucho menor. En 1943 la base aérea Wright Patterson diseñó y fabricó el fuselaje del Vultee BT-15 empleando elementos tipo sándwich usando poliéster reforzado con fibra de vidrio como pieles y panales de fibra de vidrio y madera de balsa como núcleo. La primera investigación que hace referencia a la construcción mediante estructuras tipo sándwich fue publicada en 1944 por Marguerre, y hace referencia a las cargas longitudinales compresivas. En 1948, Hoff derivó las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno para el cálculo de flexión y pandeo de placas tipo sándwich utilizando el principio de desplazamientos virtuales, pero solamente persiguió el problema del pandeo de dichas placas ante compresión en los bordes. En el mismo año, Libove y Batdorf publicaron una teoría general para la flecha de placas de sándwich. En 1949, Flügge publicó una investigación sobre la optimización de placas de sándwich en el que presentó nomogramas para solucionar los siguientes problemas: - la

dimensión geométrica y las propiedades del núcleo para carga y peso mínimo dados. - la dimensión geométrica y propiedades del núcleo para un peso y carga máxima compresiva dadas. - la resistencia última de un sándwich. En todos los casos estudiados, los materiales eran isotrópicos, y se consideraron las siguientes causas de falla: Pandeo, Wrinkling, y límite elástico de las pieles. Los bordes sin carga se consideraron libres o simplemente apoyados. Flügge continuó su trabajo en otra publicación sobre la materia en 1952. En 1951, Biljaard trató el asunto de la optimización de estructuras tipo sándwich considerando placas de peso dado por unidad de superficie, y computando el ratio de módulo elástico del núcleo y las pieles que lleva a una carga máxima de pandeo. Llevó a cabo la optimización para un ratio dado entre el espesor de núcleo y pieles, y para un espesor total dado de la placa de sándwich. De nuevo sólo se consideraron materiales isótropos. Esta publicación se citó en el Primer Congreso Nacional de los Estados Unidos sobre Mecánica Aplicada (1st U.S. National Congress of Applied Mechanics) en 1952. Ericksen, del Laboratorio de Productos Forestales americano (USFPL) publicó en 1951 un documento sobre los efectos de la deformación por cortadura en flecha producida en placas de sándwich compuestas por materiales de propiedades isotrópicas. Las rigideces a flexión de las pieles fueron también tenidas en cuenta. El estudio utilizó una serie de Fourier doble para representar la flecha, los resultados fueron presentados en forma de gráfico, incluyendo deformaciones y esfuerzos en la placa. No se incluyeron

gráficas específicas para los esfuerzos recibidos por pieles y núcleo. Se presentaron expresiones generales para el cálculo de tensiones en los componentes del sándwich siempre que estos estén formados por materiales ortótropos tanto en núcleo como en pieles. En 1952, Eringen obtuvo del teorema de la energía potencial mínima cuatro ecuaciones diferenciales parciales para la flexión y el pandeo de placas de sándwich con núcleos y pieles isótropos bajo distintos estados de carga y condiciones de contorno. Sin embargo, los resultados obtenidos sólo resultaron útiles para obtener información relativa al pandeo. En 1952, March del USFPL estudió el comportamiento de placas frente a cargas laterales compresivas aplicadas en el borde. El estudio estaba orientado para pieles y núcleos isótropos, y limitado exclusivamente a expresiones para flecha, momento flector y reacciones. En 1956, de nuevo Ericksen estudió la flecha de dichas placas mediante dobles series de Fourier. En 1955, March, mediante una publicación del USFPL tuvo en cuenta los efectos de la deformación transversal en la flecha de las placas formadas por materiales ortótropos. Un estudio definitivo del USFPL sobre diseño y optimización realizado por Raville en 1955 planteó las expresiones teóricas para la flexión, la tensión en placas rectangulares simplemente apoyadas utilizando series dobles de Fourier para representar la flecha. Para este estudio se tuvieron en cuenta pieles isótropas y núcleos ortótropos, y los resultados se presentaron en gráficas. Éste trabajo realizado por el USFPL queda reflejado en Military Handbook 23, utilizado con fines de diseño. En 1956 Gerard

habla en un capítulo de su libro “Minimum weight Analysis of Compression Structures” sobre la optimización de placas sándwich. Kaechele publicó en 1957 un estudio sobre diseño de paneles tipo sándwich de mínimo peso. Presentando un método para determinar la configuración óptima de paneles planos simplemente apoyados expuestos a compresión siempre que sean conocidos la carga, la anchura y las curvas tensión-deformación del material empleado en las pieles. Aplicando condiciones adicionales de máximos tensión y desplazamiento en las pieles, y densidad del núcleo. Aplicó éste método para núcleos de panal de abeja y de celdas hexagonales. Adicionalmente, planteó los efectos que supondría un entorno de altas temperaturas. Cheng presentó otra serie de soluciones, la cual trataba expresiones para el cálculo de momento flector, deformación y cortadura. Heath, en una publicación datada en 1960, trata las teorías existentes hasta la fecha sobre paneles planos de sándwich sujetos a compresión longitudinal. La segunda parte de su publicación trata la optimización de los mismos. En resumen, tras la segunda guerra mundial y hasta mediados de los años 60, el estudio de paneles de sándwich se limitó a cargas uniformes y apoyos simples, y fue llevado a cabo en su mayoría por el USFPL, los avances y conclusiones llevados a cabo se encuentran publicados en la publicación MIL-HDBK-23, que fue continuamente actualizado a lo largo de esos años. A mediados de los 60, dos publicaciones de gran importancia llegaron al panorama de las estructuras tipo sándwich, éstas fueron las de Plantema, en 1966 y H. G.

Allen en 1969. Estos dos libros se consideraron durante los siguientes años las “biblias” de la construcción de sándwiches. En dichas fechas, El Naval Air Engineering Center esponsorizó varios estudios sobre la aplicación de sándwichs en aeronáutica para sustituir las estructuras de aluminio, basando los requerimientos en la reducción de peso. Los resultados de esas investigaciones están recogidos en varias publicaciones de J. R. Vinson y S. Shore citadas en la bibliografía. Desde la publicación de los libros de Allen y Plantema, el uso de sándwichs se ha convertido en más y más común. Además, se han realizado ocho conferencias internacionales sobre la construcción mediante estructuras de este tipo, la primera se realizó en 1989, y la última está datada en 2008. En la bibliografía se citan las cuatro primeras a modo de ejemplo. En el año 1999, J.R. Vinson publicó “The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials”, Un libro que trata la materia en gran detalle. El autor es uno de los mayores expertos, al haber sido uno de los encargados del estudio realizado en los 60 por el centro de ingeniería aeroespacial americano, y acumula en sus páginas una gran cantidad de información al respecto del cálculo de la respuesta mecánica de este tipo de estructuras. Así como otros materiales. En 2011, L.A. Carlsson y G.A. Kardomateas publican “Structural and Failure Mechanics of Sandwich Composites”, Un libro especializado en las teorías de falla de las estructuras que emplean sándwiches, tratando las propiedades de dichas estructuras, la deformación por cortadura y por flexión, el tratamiento según las teorías

de la elasticidad, la “High-Order Sándwich Panel Theory” (HSAPT), que trata sobre la respuesta de placas de sándwich ante una gran variedad de esfuerzos y condiciones de contorno y los casos de desprendimiento de la estructura (fallo en los adhesivos) debidos a pandeo, flexión, vibraciones, etc. Presentando uno de los más profundos análisis sobre la materia al respecto. Otra publicación de importancia es la “Journal of Sandwich Structures and Materials”, que se ha publicado anualmente desde 1999 hasta 2013 en el mes de Enero. En ésta publicación se recogen la mayoría de estudios relativos a éste tipo de estructuras a lo largo del año anterior, siendo especialmente relevantes en las últimas fechas los estudios de vibraciones y comportamiento de placas no planas, así como las combinaciones utilizando los últimos materiales compuestos para las pieles, y nuevas geometrías en el núcleo.

2.3. Teoría del Laminado

Las ecuaciones de la teoría de sándwich dependen en gran medida de las propiedades de las pieles, que suelen ser láminas de material compuesto, es por esto que comprender la teoría del laminado resulta esencial para llegar a asimilar la de sándwich posteriormente.

2.3.1. Conceptos básicos

Un material compuesto es aquel que es formado por una matriz y unas fibras, de materiales distintos. En la figura 2.6 puede apreciarse un esquema de la composición de una lámina de material compuesto estándar.

La unión de ambos materiales debe ser lo más perfecta posible, sin rugosidad ni porosidades. Hallar las propiedades del material compuesto es un asunto relativamente trivial si se conocen las de los materiales que lo componen, a continuación se indica cómo calcularlas:

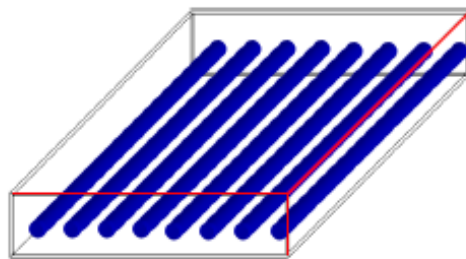


Figura 2.6: Esquema de lámina unidireccional

$$\begin{aligned}\frac{v_{fibras}}{v_{total}} &= V_f \\ \frac{V_{matriz}}{V_{total}} &= V_m \\ V_f + V_m &= 1\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\rho_{teo} = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m\tag{2.2}$$

Siendo ρ =densidad y V =volumen. Se considera densidad teórica ya que siempre hay un pequeño porcentaje de porosidad, que es calculable pesando el material y comparando dicho peso con el teórico.

2.3.2. Micromecánica de láminas unidireccionales

Para comprender la teoría del laminado, hay que partir del caso más básico, que es el de lámina unidireccional, donde las propiedades como el módulo de Young, que sería distinto en cada dirección si el laminado no fuese igual en todas ellas, puede calcularse mediante ensayos de tracción, o utilizando las reglas de los volúmenes parciales y los módulos de Young de cada material, como muestran las ecuaciones: En la siguiente ecuación, cada “F” representa la proporción del esfuerzo recibido por el material compuesto que corresponde a fibras y matriz respectivamente.

$$F_1 = F_f + F_m\tag{2.3}$$

Se convierten esfuerzos en tensiones para poder aplicar las teorías de la elasticidad.

$$\sigma_1 \cdot A = \sigma_f \cdot A_f + \sigma_m \cdot A_m \quad (2.4)$$

Aplicando 2.1.

$$\sigma_1 = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot (1 - V_f) \quad (2.5)$$

Por otro lado, se denominará ϵ a la deformación, siendo la dirección 1 aquella hacia la que se encuentran orientados tanto esfuerzos como fibras.

$$\sigma_f = E_f \cdot \epsilon_f = E_f \cdot \epsilon_1 \quad (2.6)$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \epsilon_m = E_m \cdot \epsilon_1$$

Aplicando de nuevo la regla de las mezclas se llega a la siguiente conclusión:

$$E_1 \cdot \epsilon_1 = E_f \cdot \epsilon_1 \cdot V_f + E_m \cdot \epsilon_1 \cdot V_m \quad (2.7)$$

Simplificando.

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f) \quad (2.8)$$

Una vez conocidas las propiedades de la lámina queda plantear el problema elástico en toda su extensión. A diferencia de los metales y demás materiales homogéneos, las propiedades de un material compuesto dependen de la dirección de sus fibras, por tanto es necesario no simplificar las fórmulas y los cálculos y partir de los tensores de tensión y deformación para hallar soluciones válidas.

2.3.3. Micromecánica de Lámina

Ecuaciones Constitutivas

Con éste propósito se recurrirá a la Relación de Duhamel-Neumann, que es la relación lineal más general entre tensiones y deformaciones:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})^0 + C_{ijkl} \cdot (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) - \gamma_{ij} \cdot (\theta - \theta^0) \quad (2.9)$$

Donde C es el tensor de comportamiento, σ_{ij} es el tensor de tensiones, ϵ_{kl} es el tensor de deformaciones, γ_{ij} es el tensor de dilatación térmica, y θ es la temperatura. Los superíndices 0 indican condiciones iniciales. Ampliando la relación de Duhamel-Neumann a todas las direcciones se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

El vector $[C]$ es simétrico. Para materiales completamente anisótropos se requieren 21 constantes elásticas independientes. También suele utilizarse el tensor inverso:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Simetrías en el material

Dependiendo de los planos de simetría que tenga el material, el problema puede simplificarse muchísimo, por ejemplo, si se cuenta con tres planos ortogonales entre sí de simetría elástica uno de ellos isotrópico, el número de constantes necesarias se reduce a 5.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Materiales Ortótropos

Un material ortótropo es aquel que tiene dos o tres ejes ortogonales entre sí, de doble simetría rotacional, de forma que sus propiedades mecánicas son, en general, diferentes en las direcciones de cada uno de esos ejes. Los materiales ortótropos son entonces anisótropos, ya que sus propiedades dependen de la dirección en que son medidas. En cambio un material isotrópico tiene las mismas propiedades en todas las direcciones. Un ejemplo común de material ortótropo con dos ejes de simetría es un polímero reforzado por fibras de vidrio o carbono paralelas. La resistencia y la rigidez de un material compuesto de estas características generalmente serán mayores en la dirección paralela a las fibras respecto de la dirección transversal, que es el

caso que se estudiará a continuación: Las constantes “C” de comportamiento, tienen un significado físico, que viene dado por las ecuaciones de la ley de Hooke:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \cdot \sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3} \cdot \sigma_3 & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\
 \epsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_3} \cdot \sigma_3 & \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{G_{13}} \\
 \epsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E_3} - \frac{\nu_{31}}{E_1} \cdot \sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2} \cdot \sigma_2 & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Queda mucho más sencillo si en lugar de utilizar el vector “C” de constantes de comportamiento, se utiliza su inverso “S”, quedando los siguientes valores para sus constantes en el caso de un material ortótropo.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \\
S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_2} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_3} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_3} \\
S_{21} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} & S_{31} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} & S_{32} &= -\frac{\nu_{32}}{E_2}
\end{aligned}$$

2.3.4. Teorías aplicadas a láminas sueltas

Propiedades

Conocidos los casos generales, puede pasarse a su aplicación directa a láminas en estado de tensión plana. En la siguiente figura (fig. 2.7) se muestra el sistema de coordenadas empleado en las ecuaciones.

Al tratarse de una placa situada en el plano 12, todas las ecuaciones relativas al tercero pierden relevancia.

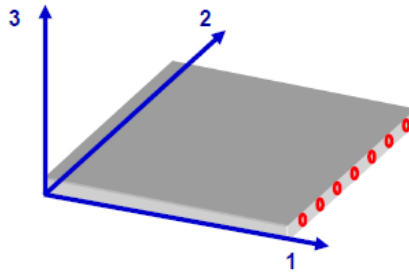


Figura 2.7: Esquema del sistema de coordenadas empleado

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \cdot \sigma_2 \\
\epsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot \sigma_1 \\
\gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Matriz de rigidez en ejes locales

Pasaremos a llamar a la matriz $[S]$ (inversa de $[C]$), matriz de flexibilidad, y la matriz $[C]$ pasará a llamarse $[Q]$, o matriz de rigidez al reducir sus dimensiones de 6x6 a 3x3 (eliminando todo lo relativo al tercer plano). Al tratar con materiales cuyas propiedades dependen de la orientación de las fibras, el eje seleccionado resulta especialmente relevante, inicialmente se definirá la matriz de rigidez en ejes locales:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{SS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}\cdot E_2}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}\cdot E_1}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Matriz de rigidez en ejes globales

Puede ser necesario, dependiendo de la dirección de las fibras del laminado, utilizar otros ejes, ya sea por conveniencia del problema en cuestión o por relevancia de ciertas direcciones que no tienen por qué coincidir con las de las fibras de la lámina, para esto se define la matriz de rigidez en ejes globales, por ejemplo:

En ejes 12: $\{\sigma\}^{12} = [Q] \cdot \{\epsilon\}^{12}$ En ejes xy: $\{\sigma\}^{xy} = [\bar{Q}] \cdot \{\epsilon\}^{xy}$

Entonces:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Definiendo la matriz $[T]$ de cambio de ejes como:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & -2 \cdot m \cdot n \\ -m \cdot n & m \cdot n & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Siendo $m = \cos\theta$ y $n = \sin\theta$. De forma general:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xs} \\ \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{ys} \\ \bar{Q}_{xs} & \bar{Q}_{ys} & \bar{Q}_{ss} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

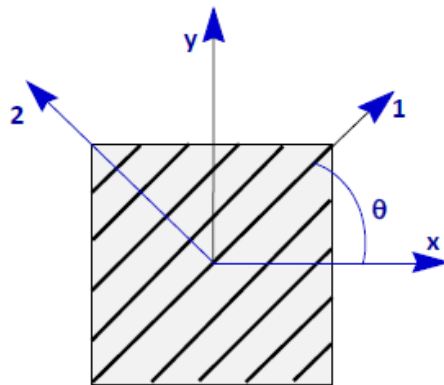


Figura 2.8: Ejemplo de discordancia entre ejes locales y globales

Donde cada uno de los elementos de la matriz de rigidez es:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{xx} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n^2 \cdot m^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\
\bar{Q}_{yx} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4 \cdot Q_{ss}) \cdot n^2 \cdot m^2 + Q_{12} \cdot (n^4 + m^4) \\
\bar{Q}_{yy} &= Q_{11} \cdot n^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n^2 \cdot m^2 + Q_{22} \cdot m^4 \\
\bar{Q}_{xs} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n \cdot m^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n^3 \cdot m \\
\bar{Q}_{ys} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n^3 \cdot m + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n \cdot m^3 \\
\bar{Q}_{ss} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 2 \cdot Q_{ss}) \cdot n^2 \cdot m^2 + Q_{ss} \cdot (n^4 + m^4)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Constantes aparentes de una lámina

Del mismo modo que cambia la matriz de rigidez, las propiedades de la lámina, al ser dependientes de la dirección que se esté teniendo en cuenta, también dependen de los ejes en los que se esté trabajando. A continuación se muestran las fórmulas que definen las constantes aparentes de una lámina en ejes globales:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_x} &= \frac{1}{E_1} \cdot \text{sen}^4\theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2 \cdot \nu_{21}}{E_1}\right) \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{cos}^2\theta + \frac{1}{E_2} \text{sen}^4\theta \\
\frac{1}{E_y} &= \frac{1}{E_1} \cdot \text{sen}^4\theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2 \cdot \nu_{21}}{E_1}\right) \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{cos}^2\theta + \frac{1}{E_2} \cdot \text{cos}^4\theta \\
\frac{1}{G_{xy}} &= 2 \cdot \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} + \frac{4 \cdot \nu_{21}}{E_1}\right) \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{cos}^2\theta + \frac{1}{G_{12}} \cdot (\text{sen}^4\theta + \text{cos}^4\theta) \\
\nu_{yx} &= E_x \cdot \left[\frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot (\text{sen}^4\theta + \text{cos}^4\theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right) \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{cos}^2\theta\right] \\
\nu_{xy} &= E_y \cdot \left[\frac{\nu_{21}}{E_1} \cdot (\text{sen}^4\theta + \text{cos}^4\theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right) \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{cos}^2\theta\right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3.5. Aplicación de teorías a un laminado

El siguiente paso es comprender un laminado como el conjunto de varias láminas superpuestas, éstas suelen tener orientaciones distintas entre sí (ejemplo figura). La notación del laminado refleja la colocación de las láminas en orden, desde fuera hacia dentro, para el caso reflejado en la siguiente imagen figura, la notación sería $[0/\pm 45/0/\bar{90}]_s$, donde el signo menos encima del más indica que la orientación superior es la de -45° , la barra sobre el 90 indica que en el plano de simetría la lámina de 90° se encuentra cortada por la mitad, y el subíndice s indica que el laminado es simétrico.

Varios ejemplos de laminados pueden verse en la siguiente figura (2.10).

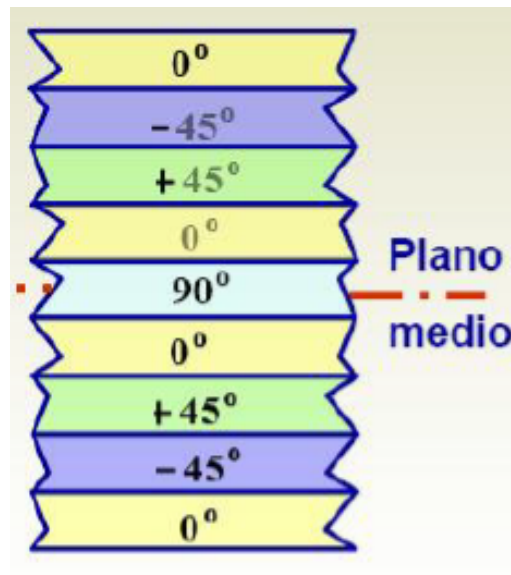


Figura 2.9: Ejemplo de apilado de láminas

Hipótesis de estudio

Las hipótesis en que se basa la teoría del laminado son las siguientes:

- Se considera a la lámina como un material cuasi-homogéneo y ortótropo.
- Se considera a cada lámina como un material cuyo comportamiento es elástico lineal hasta rotura. Por tanto su matriz de rigidez será según indica la ecuación 2.16.
- Las láminas están perfectamente unidas entre sí.
- El laminado y todas las láminas se encuentran en un estado de tensión plana.
- Es importante notar que la hipótesis de tensión plana no es aplicable en los siguientes casos:

1. Borde libre.

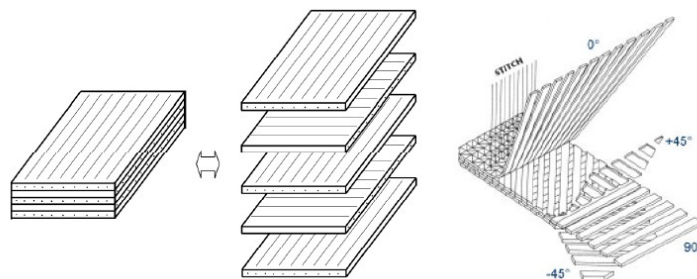


Figura 2.10: Distintos laminados

2. Laminados de espesor variable.
 3. Uniones adhesivas entre laminados.
 4. Placas rigidizadas (es decir, con elementos rígidos adheridos a éstas.
- Los desplazamientos y sus derivadas son pequeños.
 - Se verifica la hipótesis de Kirchhoff según la cual una sección normal al plano medio del laminado permanece plana a la superficie media deformada, es decir: $\gamma_{yz} = 0$ y $\gamma_{xz} = 0$ y el laminado no cambia de espesor, es decir: $\epsilon_z = 0$.

Es por tanto posible expresar el desplazamiento de cada punto del laminado en función de los desplazamientos del plano medio y de las rotaciones de la sección del laminado.

Campo de desplazamientos y deformaciones

Quedan definidos los ejes de cálculo como muestra la figura 2.11.

Donde el campo de desplazamientos y cada una de las distintas variables en caso de deformación serán de la forma indicada en la figura 2.12:

Donde las dos secciones representadas son sin deformar y deformada, res-

pectivamente. Los desplazamientos quedan por tanto definidos como:

$$u(x, y, z) = u_o(x, y) - \phi_x \cdot z$$

$$v(x, y, z) = v_o(x, y) - \phi_y \cdot z$$

$$w(x, y, z) = w_o(x, y) \quad (2.22)$$

$$\phi_x = \frac{\partial w_o}{\partial x}$$

$$\phi_y = \frac{\partial w_o}{\partial y}$$

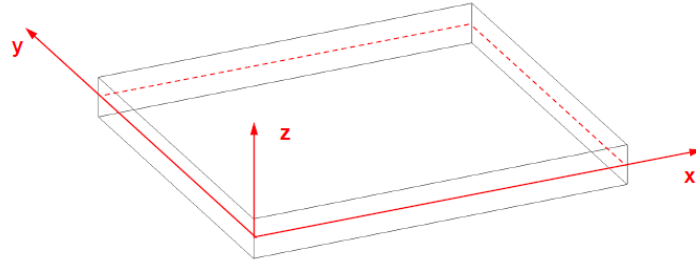


Figura 2.11: Sistema de coordenadas empleado

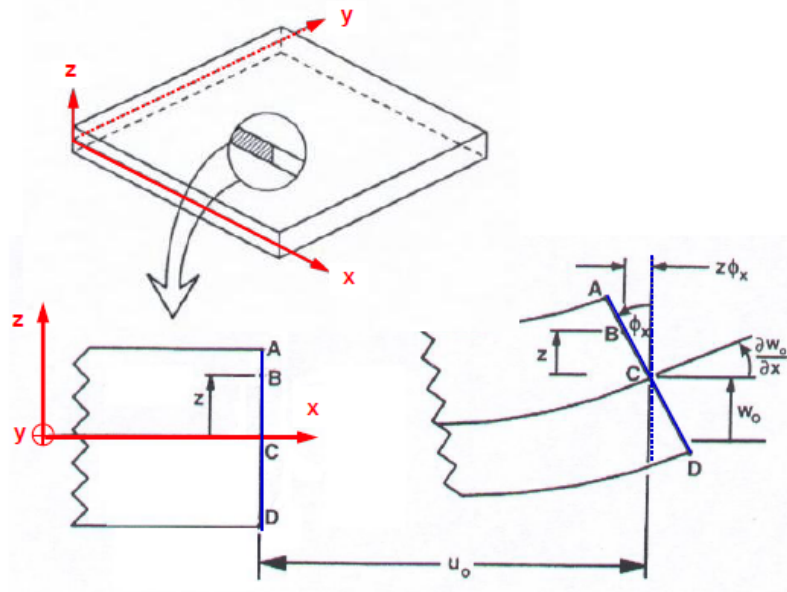


Figura 2.12: Descripción gráfica de desplazamientos y variables

Y las deformaciones quedan expresadas en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \cdot 2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \cdot \partial y} \\
\epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= 0 \\
\epsilon_z &= 0 & \gamma_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Definiendo las deformaciones del plano medio como:

$$\begin{aligned}
\epsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
\epsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
\gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Y las curvaturas como:

$$\begin{aligned}
k_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
k_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
k_{xy} &= -2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \cdot \partial y}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Quedando por tanto las ecuaciones acumuladas en los siguientes vectores:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

Esfuerzos

Las tensiones en los laminados, a diferencia de las deformaciones, son función discontinua de z , ya que no se trata de materiales isótopos, como

muestran las siguientes representaciones (figuras 2.13 y 2.14) Se definen por tanto los esfuerzos planos y los momentos según las siguientes imágenes (figuras 2.15 y 2.16) Donde las ecuaciones que definen dichos esfuerzos por

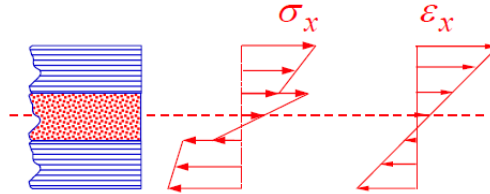


Figura 2.13: Tensiones y deformaciones en un material laminado

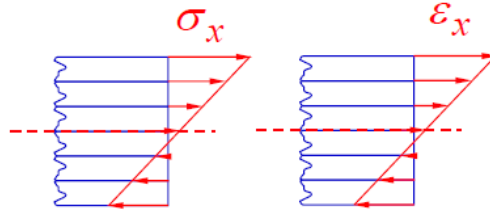


Figura 2.14: Tensiones y deformaciones en un material isotrópico

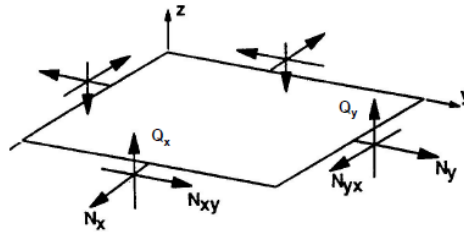


Figura 2.15: Esfuerzos planos en un material laminado

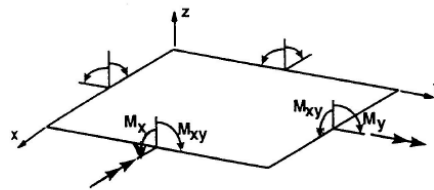


Figura 2.16: Momentos en un material isotrópico

unidad de longitud vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dz & M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \\
N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \\
N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dz & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Matrices de Rigidez

El vector de esfuerzos de un laminado queda definido por la siguiente cadena de ecuaciones:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + z \cdot \{k\} \tag{2.28}$$

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \cdot \{\epsilon\} \tag{2.29}$$

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \cdot dz \tag{2.30}$$

$$\{N\} = [A] \cdot \{\epsilon^0\} + [B] \cdot \{k\} \tag{2.31}$$

Donde:

$$[A] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot dz \tag{2.32}$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z \cdot dz \tag{2.33}$$

Y el de momentos:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + z \cdot \{k\} \quad (2.34)$$

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \cdot \{\epsilon\} \quad (2.35)$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \cdot z \cdot dz \quad (2.36)$$

$$\{M\} = [B] \cdot \{\epsilon^0\} + [D] \cdot \{k\} \quad (2.37)$$

Donde:

$$[D] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z^2 \cdot dz \quad (2.38)$$

$$[B] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot z \cdot dz \quad (2.39)$$

Por tanto queda definida la matriz de rigidez plana como:

$$[A] = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}]_i \cdot dz \quad (2.40)$$

Aplicada lámina a lámina, siendo N el número de láminas y h_i la altura de cada una de ellas:

$$[A] = \sum_i^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} [\bar{Q}]_i \cdot dz \quad (2.41)$$

$$[A] = \sum_i^N [\bar{Q}]_i \cdot h_i \quad (2.42)$$

Siguiendo la misma clase de razonamiento, se deducen las matrices de rigidez a flexión $[D]$ y de acoplamiento $[B]$:

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_i^N [\bar{Q}]_i \cdot (z_i^3 - z_{i-1}^3) [B] = \frac{1}{2} \sum_i^N [\bar{Q}]_i \cdot (z_i^2 - z_{i-1}^2) \quad (2.43)$$

Las propiedades de cada una de las matrices previamente citadas son las siguientes:

Matriz de rigidez plana $[A]$

- Relaciona los esfuerzos de membrana con las deformaciones planas.
- Es independiente de la secuencia de apilamiento.
- Si sus elementos 31 y 32 son distintos de 0, existe acoplamiento entre tracción-compresión y cortadura.

Matriz de rigidez a flexión:

- Relaciona los momentos con las curvaturas.

- Es fuertemente dependiente de la secuencia de apilamiento.

Matriz de rigidez de acoplamiento:

- Relaciona los esfuerzos de membrana con las curvaturas o los momentos con las deformaciones planas.
- Es dependiente de la secuencia de apilamiento.
- Si sus elementos 31 y 32 son distintos de 0, existe acoplamiento entre tracción y torsión.

Tipos de laminado

Según las secuencias de apilamiento los laminados se clasifican en simétricos y equilibrados. Naturalmente existen otros modos de apilar láminas, pero generalmente carece de sentido utilizarlos, ya que provocan comportamientos complejos y normalmente indeseables.

Laminado simétrico

Un laminado es simétrico si por cada lámina que existe a un lado del plano medio existe otra a la misma distancia al otro lado del plano con las mismas características (espesor, orientación y propiedades) como muestra la imagen (fig. 2.17).

En un laminado simétrico la matriz $[B]$ de acoplamiento es igual a 0, lo que simplifica enormemente el cálculo de esfuerzos y momentos.

Laminado equilibrado

Un laminado es equilibrado si consta de igual número de láminas idénticas orientadas a $+\theta$ y $-\theta$

Dependiendo de la secuencia de apilamiento, un laminado puede ser simétrico, antimétrico o asimétrico.

Simétrico: $[\pm\theta_1 / \pm\theta_1]_S$ (8 láminas)

Antimétrico: $[\theta_1 / \theta_2 - \theta_1 / -\theta_2]$ (4 láminas)

Asimétrico: $[\theta_1 / -\theta_2 / -\theta_1 / \theta_2]$ (4 láminas)

En general existe acoplamiento flexión/torsión salvo que el laminado sea antimétrico.

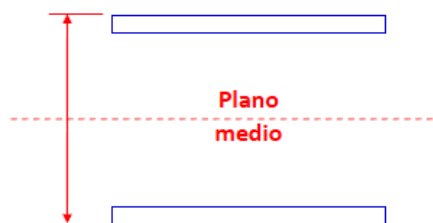


Figura 2.17: Esquema de laminado simétrico

2.4. Simplificaciones para Sándwich

2.4.1. Consideraciones previas

Para comprender la forma de trabajar de un elemento tipo sándwich es necesario diferenciar los esfuerzos que absorben pieles y núcleo. Como puede verse en el esquema de la figura (2.18), las pieles soportan las cargas inducidas por la flexión y el núcleo el esfuerzo cortante que actúa sobre la estructura. Es decir, las pieles trabajan como laminados solicitados por cargas en su plano, soportando el momento flector que aparece sobre el sándwich.

Debe comprenderse que en un sándwich tanto núcleo como pieles se deforman a la par, pero al estar éstos compuestos por materiales distintos, las tensiones que soportan son muy diferentes. En la imagen (fig. 2.19) puede verse un elemento diferencial de sándwich deformado.

Por tanto pueden definirse las deformaciones de la siguiente manera:

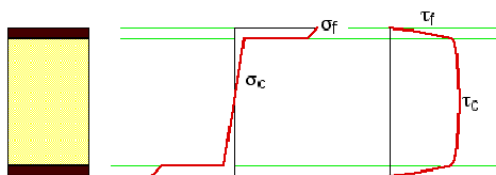


Figura 2.18: Distribución real de esfuerzos en un sándwich

$$R \cdot d\theta = dx(1 + \epsilon_x^0) \quad (2.44)$$

$$(R + z)d\theta = dx(1 + \epsilon_x(z)) \quad (2.45)$$

Por tanto:

$$\epsilon_x(z) = \epsilon_x^0 + \frac{z}{R} \cdot (1 + \epsilon_x^0) \quad (2.46)$$

De lo que considerando negligible el valor del producto de $\frac{z}{R} \cdot \epsilon_x^0$, se llega a la conclusión de que:

$$\epsilon_x(z) \cong \epsilon_x^0 + \frac{z}{R} \quad (2.47)$$

Por lo que se puede aproximar la distribución de tensiones de fig. 2.18 a la de fig. 2.20.

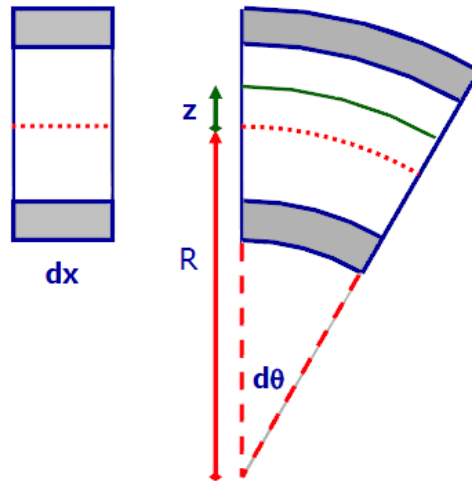


Figura 2.19: Deformación de un elemento diferencial tipo sándwich

2.4.2. Cálculo de tensiones

Tensiones normales

Para el cálculo de tensiones normales en una viga sándwich se despreciarán aquellas en dirección transversal, como suele hacerse en el cálculo de tensiones en vigas de cualquier otro material para simplificar las expresiones, por tanto es de esperar que las tensiones sigan las leyes de la elasticidad, por lo que:

$$\sigma_x(z) \approx E(z) \cdots \left(\epsilon_x^0 + \frac{z}{R} \right) \quad (2.48)$$

Debe tenerse en cuenta que el módulo de elasticidad es de valor diferente en pieles y núcleo al tratarse de materiales diferentes. Integrando las tensiones para toda la sección se calculan los esfuerzos. Para los cálculos realizados en esta sección se considerarán los signos y nomenclatura empleados en la figura (fig. 2.21).

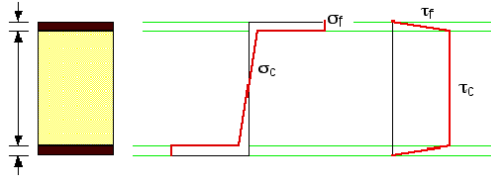


Figura 2.20: Deformación aproximada de tensiones en un sándwich

$$N = \sigma_p^+ \cdot \epsilon_p \cdot B + \sigma_p^- \cdot \epsilon_p \cdot B \quad (2.49)$$

$$M = \sigma_p^+ \cdot \epsilon_p \cdot B \cdot \left(\frac{e_p + e_n}{2}\right) + \sigma_p^- \cdot \epsilon_p \cdot B \cdot \left(\frac{e_p + e_n}{2}\right) \quad (2.50)$$

Separando los valores para las tensiones normales, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_p^+ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{e_p \cdot B} + \frac{2 \cdot M}{e_p \cdot B \cdot (e_p + e_n)} \right) \quad (2.51)$$

$$\sigma_p^- = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{e_p \cdot B} - \frac{2 \cdot M}{e_p \cdot B \cdot (e_p + e_n)} \right) \quad (2.52)$$

$$(2.53)$$

Tensiones de cortadura

Para el cálculo de las tensiones de cortadura se partirá de la ecuación de equilibrio interno en dirección x, según la cual:

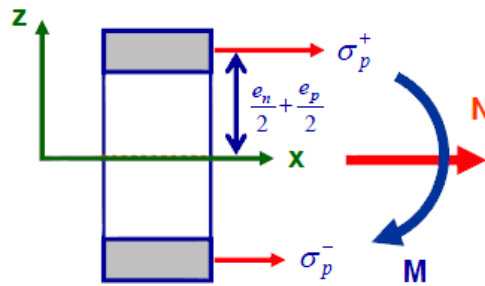


Figura 2.21: Esfuerzos y coordenadas de una rebanada de sándwich

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.54)$$

Donde X son las fuerzas por unidad de volumen y q_x son las fuerzas por unidad de longitud en dirección x . Para el caso de la figura (fig. 2.22), el valor de X queda como sigue:

$$X = \frac{q_x}{B \cdot 2 \cdot e_p} \quad (2.55)$$

Donde la fuerza por unidad de longitud q_x se considera repartida de forma uniforme por la sección considerando únicamente las pieles, por tanto:

En el núcleo:

$$X = 0 \quad \sigma_x = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_n = cte$$

En las pieles:

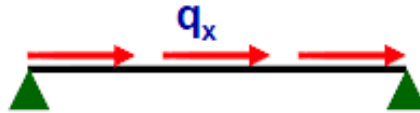


Figura 2.22: esquema del caso estudiado

$$X = \frac{q_x(x)}{2 \cdot B \cdot e_p} \quad \sigma_x = \sigma_p(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = f(x) \rightarrow \tau_{xz} \text{ depende de } z$$

En las caras externas $\tau_{xz} = 0$, y en los planos piel/núcleo debe existir continuidad de tensiones de cortadura para que se cumplan las ecuaciones de equilibrio, por tanto $\tau_{xz} = \tau_n$, como muestra la figura (fig. 2.23). Donde tras integrar la ecuación del equilibrio para la piel inferior, queda el siguiente resultado para el valor de la tensión de cortadura a lo largo del núcleo:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_p^-}{\partial x} - \frac{q_x}{2 \cdot B \cdot e_p} \quad (2.56)$$

Aplicando las siguientes condiciones de contorno:

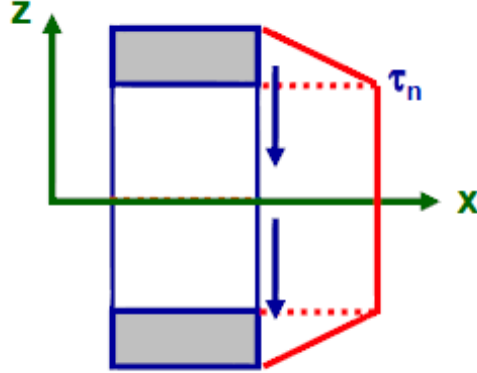


Figura 2.23: distribución de tensiones de cortadura

$$\begin{aligned}
z = -\left(\frac{e_n}{2} + e_p\right) & \rightarrow \tau_{xz} = 0 \\
z = -\frac{e_n}{2} & \rightarrow \tau_{xz} = \tau_n
\end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\tau_n = -e_p \cdot \left(\frac{\partial \sigma_p^-}{\partial x} + \frac{q_x}{2 \cdot B \cdot e_p} \right) \quad (2.57)$$

Donde al ser conocida σ_p^- en función de los esfuerzos, queda:

$$\tau_n = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot \left(-\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{2}{e_p + e_n} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} - q_x \right) \quad (2.58)$$

Esfuerzos cortantes

Se plantea el equilibrio de fuerzas y momentos de una rebanada de sándwich como muestra la figura (fig. 2.24), donde los equilibrios de fueras longitudinales, fuerzas transversales y momentos quedan de la siguiente manera:

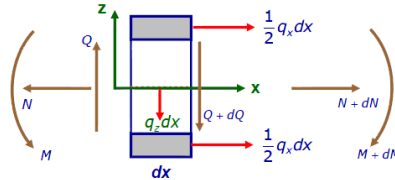


Figura 2.24: Equilibrio de fuerzas en una rebanada

$$-N + (N + dN) + q_x \cdot dx = 0$$

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$-Q + (Q + dQ) + q_z \cdot dx = 0$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q_z$$

$$-M + (M + dM) + (Q + dQ) \cdot dx + q_z \cdot dx \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

$$dM + Q \cdot dx = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = -Q$$

La tensión de cortadura puede expresarse en función del esfuerzo cortante como:

$$\tau_n = -\frac{Q}{B \cdot (e_p + e_n)} \quad (2.59)$$

2.4.3. Cálculo de deformaciones

Para calcular las deformaciones volvemos a la ecuación que relaciona éstos con las tensiones:

$$\sigma_x(z) \approx E(z) \cdot \left(\epsilon_x^0 + \frac{z}{R} \right) \quad (2.60)$$

Donde sustituyendo z por sus valores en ambas pieles, y haciendo lo mismo con σ_z en ambos casos se llega a las siguientes conclusiones:

$$\begin{aligned}\sigma_p^+ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{e_p \cdot B} + \frac{2 \cdot M}{e_p \cdot B \cdot (e_p + e_n)} \right) &= E_p \left(\epsilon_x^0 + \frac{1}{R} \cdot \frac{e_p + e_n}{2} \right) \\ \sigma_p^- &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{e_p \cdot B} - \frac{2 \cdot M}{e_p \cdot B \cdot (e_p + e_n)} \right) &= E_p \left(\epsilon_x^0 - \frac{1}{R} \cdot \frac{e_p + e_n}{2} \right)\end{aligned}\tag{2.61}$$

Quedando finalmente:

$$\epsilon_x^0 = \frac{N}{2 \cdot E_p \cdot B \cdot e_p} \tag{2.62}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{2 \cdot M}{E_p \cdot B \cdot e_p \cdot (e_p + e_n)^2} \tag{2.63}$$

2.4.4. Cálculo de movimientos

Desplazamientos longitudinales

Para calcular los desplazamientos longitudinales se partirá del sistema de coordenadas y las variables mencionadas en la figura (fig. 2.25), donde al integrar los desplazamientos entre una sección inicial y otra genérica queda el siguiente desarrollo:

$$dx + (u + du) = u + dx + \epsilon_x^0 \cdot dx$$

$$\frac{du}{dx} = \epsilon_x^0$$

$$u = u_A + \int_{x_A}^x \epsilon_x^0 dx$$

$$u = u_A + \int_{x_A}^x \frac{N}{2 \cdot E_p \cdot B \cdot e_p} dx$$

Quedando por tanto el $\langle EA \rangle$ equivalente de un sándwich como:

$$\langle EA \rangle = \frac{1}{2 \cdot E_p \cdot B \cdot e_p} \quad (2.64)$$

Giro

Del mismo modo, para calcular el giro se deben integrar los giros entre dos secciones, una inicial y otra genérica, como muestra la figura (fig. 2.26), quedando los cálculos del modo siguiente:

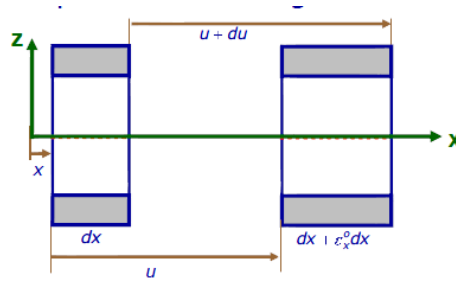


Figura 2.25: Desplazamientos inicial y genérico

$$R \cdot d\theta = dx(1 + \epsilon_x^0)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1 + \epsilon_x^0}{R} \approx \frac{1}{R}$$

$$\theta - \theta_A = \int_{x_A}^x \frac{1}{R} dx$$

$$\theta = \theta_A + \int_{x_A}^x \frac{2 \cdot M}{E_p \cdot B \cdot e_p \cdot (e_p + e_n)^2} dx$$

Quedando por tanto el $\langle EI \rangle$ equivalente de un sándwich como:

$$\langle EI \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_p \cdot B \cdot e_p \cdot (e_p + e_n)^2 \quad (2.65)$$

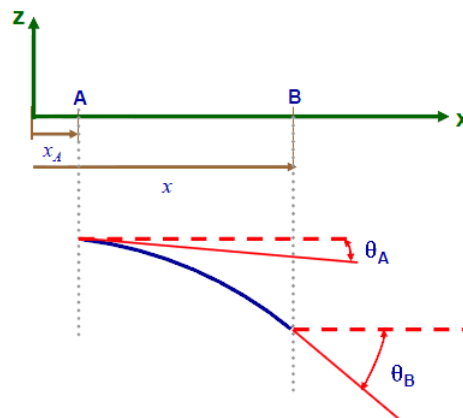


Figura 2.26: Giros inicial y genérico

2.5. Aplicación de la teoría de vibraciones

La teoría de vibraciones es demasiado extensa para incluirla en su totalidad en éste trabajo, aunque sólo se describiesen aquellas ecuaciones relevantes para el estudio dinámico del problema a resolver en él. Por tanto, la mención a ésta teoría se limitará a la solución del cálculo de desplazamientos en una viga doblemente apoyada, como la del problema a solucionar en éste trabajo.

2.5.1. Caso de viga doblemente apoyada

Se estudiará el caso de una viga doblemente apoyada, con un apoyo simple en cada uno de sus extremos (viga biapoyada), donde se llamará a la longitud que los separa L , a la rigidez a flexión de la viga $\langle EI \rangle$, al área de la sección A y a la densidad del material ρ , se llamará también a la coordenada espacial x . comenzando esta en el primer apoyo. En general estamos ante el caso que se muestra en la figura (fig. 2.27).

El valor de la rigidez a flexión de la viga $\langle EI \rangle$ viene dado por las simplificaciones para sándwich explicadas en el apartado anterior de éste trabajo, el

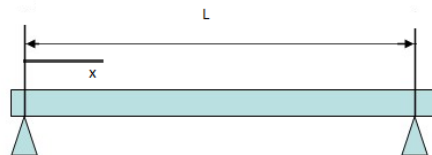


Figura 2.27: Viga doblemente apoyada

valor para la densidad del material ρ , viene dado por una regla volumétrica como la expresada en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\rho_{sandwich} \cdot V_{sandwich} &= 2 \cdot \rho_p \cdot V_p + \rho_n \cdot V_n \\
V_p &= e_p \cdot B \cdot L \\
V_n &= e_n \cdot B \cdot L \\
V_{sandwich} &= B \cdot L \cdot (2 \cdot e_p + e_n) \\
\rho_{sandwich} &= \frac{2 \cdot e_p \cdot \rho_p + \rho_n \cdot e_n}{2 \cdot e_p + e_n} \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Para calcular el desplazamiento de una viga cuando sobre ella se aplica una carga dinámica se pueden emplear diversas técnicas analíticas. Se ha utilizado una que expresa dicho desplazamiento en función de los modos propios de vibración de la viga y de la carga aplicada, dada por la siguiente ecuación (Gerardin, 1994):

$$\delta(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_m(\xi)}{\omega_m \cdot \Lambda_m \cdot L} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot (t - \tau)) d\tau \quad (2.67)$$

2.5.2. cálculo de frecuencias y modos propios

Para el cálculo de frecuencias y modos propios se aplicara el principio de trabajos virtuales conjuntamente con la teoría del laminado. La ecuación di-

ferencial que describe la oscilación libre de la probeta, planteada por Reddy, es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = I_0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \quad (2.68)$$

Donde:

- $I_0 = \int_{-H/2}^{H/2} \rho \cdot dz$
- $I_2 = \int_{-H/2}^{H/2} \rho \cdot z^2 \cdot dz$
- q = carga por unidad de longitud en dirección perpendicular al plano de la viga
- N_x = carga axial por unidad de anchura
- M_x = momento por unidad de anchura
- ρ = densidad

En la ecuación diferencial inicial se ignorarán los efectos de cortadura interlaminar para simplificar la solución y por ser estos negligibles con respecto al efecto del momento de inercia y la carga perpendicular. Al no existir cargas distribuidas ni axiales, el problema queda reducido a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{d_{11}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \quad (2.69)$$

Donde d_{11} es el primer término de la matriz de flexibilidad a flexión del laminado. Para el cálculo de frecuencias y modos propios se resolverá la siguiente ecuación.

$$w(x, t) = W(x) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.70)$$

Conocidas las siguientes condiciones de contorno forzadas por los apoyos:

$$x = 0, L \rightarrow w(x, t) = 0 \quad (2.71)$$

$$x = 0, L \rightarrow (\partial^2 w(x, t)) / \partial x^2 = 0$$

Las frecuencias propias resultan ser:

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{d_{11} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \quad (2.72)$$

Donde:

$$I_0 = \rho \cdot H \quad (2.73)$$

$$I_2 = \frac{\rho \cdot H^3}{12} \quad (2.74)$$

$$d_{11} = \frac{12}{H^3 \cdot E_1^f} \quad (2.75)$$

$$E_1^f = \frac{12 \cdot \langle EI \rangle}{B \cdot H^3} \quad (2.76)$$

Por tanto:

$$d_{11} = \frac{B}{\langle EI \rangle} \quad (2.77)$$

Siendo finalmente:

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{\frac{B \cdot \rho \cdot H}{\langle EI \rangle} \cdot \left(1 + \frac{H^2}{12} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \quad (2.78)$$

Y los modos propios:

$$W_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad (2.79)$$

2.5.3. cálculo del resto de variables del problema

Según la solución de Gerardin (1994), el valor para la variable Λ_m viene dado por la siguiente ecuación:

$$\Lambda_m = \rho \cdot A \cdot \int_0^1 W_m^2(\xi) \cdot d\xi \quad (2.80)$$

Donde $A = H \cdot B$, siendo:

- $H = (e_n + 2 \cdot e_p)$
- B = anchura de la viga

La expresión que define ρ viene dada por la siguiente deducción:

$$\begin{aligned} \rho_{sandwich} \cdot V_{sandwich} &= 2 \cdot \rho_p \cdot V_p + \rho_n \cdot V_n \\ V_p &= e_p \cdot B \cdot L \\ V_n &= e_n \cdot B \cdot L \\ V_{sandwich} &= B \cdot L \cdot (2 \cdot e_p + e_n) \\ \rho_{sandwich} &= \frac{2 \cdot e_p \cdot \rho_p + \rho_n \cdot e_n}{2 \cdot e_p + e_n} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Y $W_m(\xi) = \text{sen}(m \cdot \pi \cdot \xi)$, luego:

$$\int_0^1 W_m^2(\xi) \cdot d\xi = \frac{2 \cdot m \cdot \pi - \text{sen}(2 \cdot m \cdot \pi)}{4 \cdot m \cdot \pi} \quad (2.82)$$

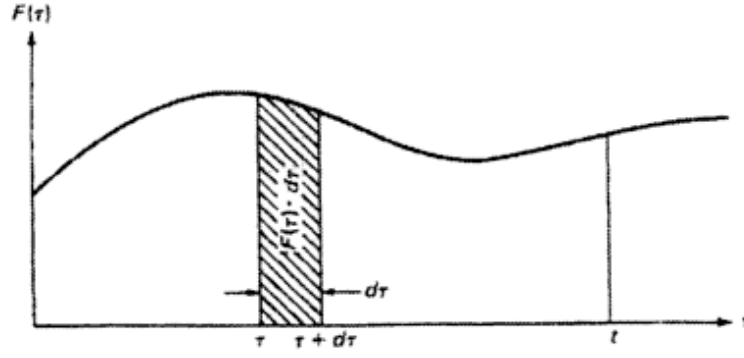


Figura 2.28: Función general de carga aproximada mediante impulsos

Por tanto:

$$\Lambda_m = \rho \cdot (e_n + 2 \cdot e_p) \cdot B \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \pi - \text{sen}(2 \cdot m \cdot \pi)}{4 \cdot m \cdot \pi} \quad (2.83)$$

2.5.4. cálculo de la integral de Duhamel

Calculadas todas las variables del problema, falta calcular el valor numérico para la parte de la ecuación de Gerardin referente a la integral de Duhamel, que responde a la siguiente formulación:

$$\int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot (t - \tau)) d\tau \quad (2.84)$$

El significado de τ queda definido en la imagen de la figura (fig. 2.28)

Introduciendo la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(\omega \cdot (t - \tau)) = \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) - \cos(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega \cdot \tau) \quad (2.85)$$

Se llega a la conclusión de que:

La integral de Duhamel responde a la siguiente formulación:

$$\int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot (t - \tau)) d\tau = \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \cos(\omega_m \cdot \tau) d\tau - \cos(\omega \cdot t) \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot \tau) d\tau \quad (2.86)$$

Donde llamaremos:

$$A(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot \cos(\omega_m \cdot \tau) d\tau \quad (2.87)$$

$$B(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot \tau) d\tau \quad (2.88)$$

Por lo que resulta necesario calcular el valor numérico de las integrales $A(t)$ y $B(t)$, para lo que es necesario utilizar métodos numéricos. En el caso del texto escrito del programa utilizado en éste trabajo, se empleará una regla trapezoidal para el cálculo de dichas integrales. Quedando finalmente:

$$\begin{aligned} A(t_i) &= A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cdot \cos(\omega_m \cdot \tau) d\tau \\ \text{Intdh}(A) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cdot \cos(\omega_m \cdot \tau) d\tau \\ \text{Intdh}(A) &= (F(t_{i-1}) - t_{i-1} \cdot \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}) \cdot \frac{\text{sen}(\omega \cdot t_i) - \text{sen}(\omega \cdot t_{i-1})}{\omega} + \\ &\quad \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \cdot \Delta t_i} \cdot [\cos(\omega \cdot t_i) - \cos(\omega \cdot t_{i-1}) + \omega \cdot (t_i \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_i) - t_{i-1} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_{i-1}))] \end{aligned} \quad (2.89)$$

y análogamente, sustituyendo senos por cosenos y viceversa, queda:

$$\begin{aligned}
B(t_i) &= A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot \tau) d\tau \\
Intdh(B) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot \tau) d\tau \\
Intdh(B) &= (F(t_{i-1}) - t_{i-1} \cdot \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}) \cdot \frac{\cos(\omega \cdot t_i) - \cos(\omega \cdot t_{i-1})}{\omega} + \\
&\quad \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \cdot \Delta t_i} \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t_i) - \text{sen}(\omega \cdot t_{i-1}) + \omega \cdot (t_i \cdot \cos(\omega \cdot t_i) - t_{i-1} \cdot \cos(\omega \cdot t_{i-1}))] \\
&\hspace{15em} (2.90)
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Procedimiento Experimental

3.1. Materiales

Las vigas sándwich están compuestas por dos materiales distintos, uno para las pieles y otro para el núcleo, a continuación se describen las propiedades y geometría de cada uno de los componentes: Para las pieles se ha utilizado un laminado compuesto por fibras de vidrio E y una matriz de resina AROPOL FS6902 de poliéster. El grosor de cada una de las pieles igual a $e_p = 3mm$, en la figura (3.1) puede verse un ejemplo de uso del material descrito.

En el caso del núcleo, el material escogido es una espuma FOAM de PVC, de densidad nominal igual a $\rho_n = 100Kg/m^3$ y espesor igual a $e_n = 30mm$, un ejemplo de espuma FOAM puede verse en la imagen de la figura (3.2).

El uso de éstos materiales para estructuras tipo sándwich se encuentra muy extendido debido a sus propiedades de absorción de energía, que es usualmente mayor a las de los materiales elásticos convencionales. Las propiedades mecánicas del laminado presente en las pieles son las siguientes:



Figura 3.1: Recipiente fabricado en laminado de fibra de vidrio y poliéster

- Densidad $\rho_p = 1800kg/m^3$.
- Módulo de Young, $E_1 = E_2 = 10,1GPa$.
- Coeficiente de Poisson, $\nu_{12} = 0,16$.
- Módulo de cortadura en el plano $G_{12} = 3,1GPa$.
- Módulo de cortadura interlaminar $G_{13} = G_{23} = 1,2GPa$.

Para conocer las propiedades del núcleo se realizaron ensayos de compresión plana en el laboratorio del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid, en los que se obtuvieron los resultados mostrados en la gráfica de la figura (3.3).

Las propiedades geométricas de la viga son las siguientes:

- espesor de las pieles $e_p = 3mm$.
- espesor del núcleo $e_n = 30mm$.



Figura 3.2: Espuma FOAM

- anchura de la viga $B = 50mm$.
- Longitud total de la viga $L_t = 480mm$.
- Distancia entre apoyos en el ensayo $L = 450mm$.

Aunque para la realización de este experimento habría resultado óptimo el montaje de láminas con laminado unidireccional (al tratarse de un estado de carga tan simple), se han realizado los experimentos empleando laminado multidireccional, ya que resultan ser los óptimos en diferentes estados de carga, y son, por tanto, aquellos cuya utilización se encuentra industrialmente más extendida (Miyano et al. 1986).

Además es interesante estudiar los laminados ortótropos porque son los

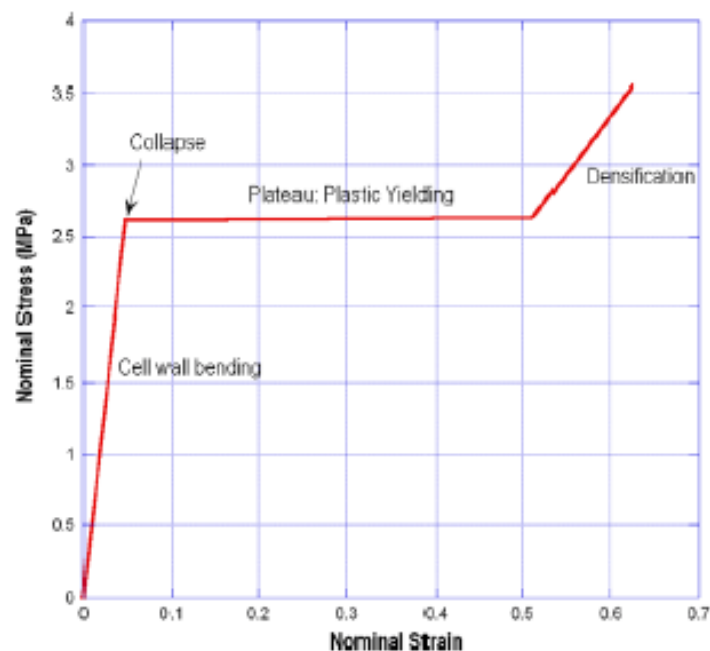


Figura 3.3: Resultados de los ensayos realizados al núcleo de foam

laminados con diferentes orientaciones de láminas más sencillos de fabricar, y además se pueden establecer comparaciones directas de este laminado con el de tejido (Winkel y Adams, 1985).

3.2. Procedimiento del ensayo

En un sándwich sometido a esfuerzos de flexión, la única función del núcleo es la de aumentar la altura total de la estructura. Son las pieles las encargadas de absorber las tensiones fruto de la aplicación del esfuerzo, es por tanto de importancia clave el comportamiento ante éste tipo de esfuerzos de los laminados. Los materiales compuestos laminados son especialmente sensibles a los esfuerzos de cortadura interlaminar, como los producidos en este tipo de ensayos. Es por tanto de importancia vital emplear vigas esbeltas para asegurar que éstos efectos son despreciables en comparación a los de flexión. La norma sugiere relaciones entre espesor y distancia entre apoyos de 32/1 o 40/1 (Wilson y Carlsson (1992)) por lo que los ensayos realizados en el laboratorio del Departamento de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid se han realizado con vigas cuyas pieles acumulan un espesor total de 6 milímetros y una distancia entre apoyos de 450 milímetros, como muestra la imagen (fig. 3.4).

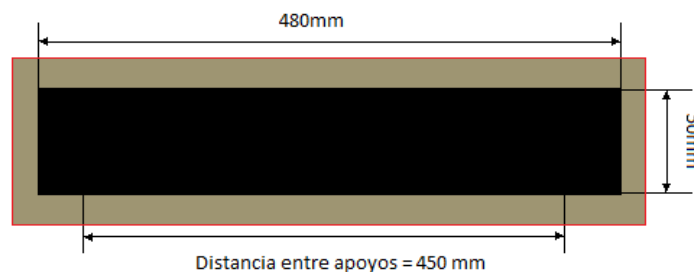


Figura 3.4: Dimensiones de la probeta de flexión en tres puntos

El dispositivo del ensayo es un aparato para ensayos de flexión en tres puntos, que consiste en un impactador de tipo charpy de masa $m = 7,97kg$ y longitud $l = 20mm$ y dos apoyos separados entre sí una longitud $L = 450mm$ como indica la imagen (fig. 3.4). Para medir la fuerza de contacto se empleó una torre de caída de peso CEAST Fractovst 6785. Los ensayos fueron grabados utilizando una cámara de alta velocidad, midiendo la velocidad de impacto, la velocidad post impacto y el desplazamiento de ambas pieles.

3.3. Resultados del ensayo

El ensayo arroja resultados de velocidad del impactador, desplazamiento vertical del punto medio de la viga, fuerza aplicada y energía medidos a intervalos de valor $t_i = 0,005s$. Los resultados se muestran en las gráficas de las imágenes (Velocidad del impactador frente a tiempo, fig. 3.5, Desplazamiento vertical del punto medio frente a tiempo fig. 3.6, Fuerza aplicada frente a tiempo fig. 3.7, Energía frente a tiempo fig. 3.8).

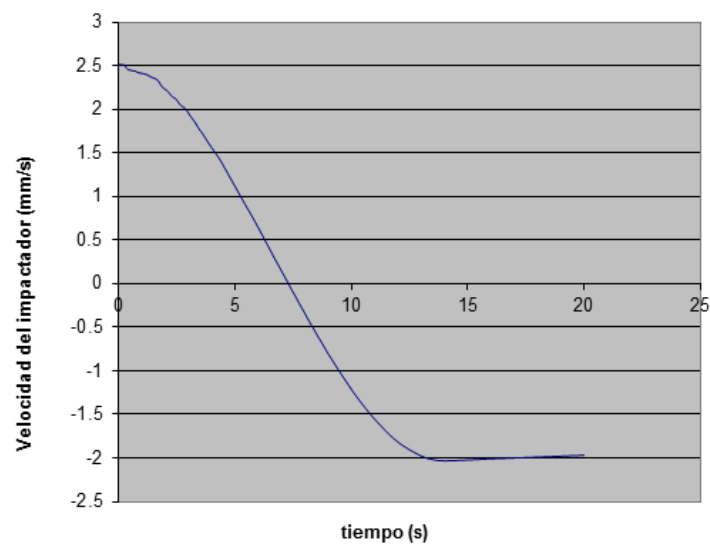


Figura 3.5: Velocidad del impactador frente a tiempo

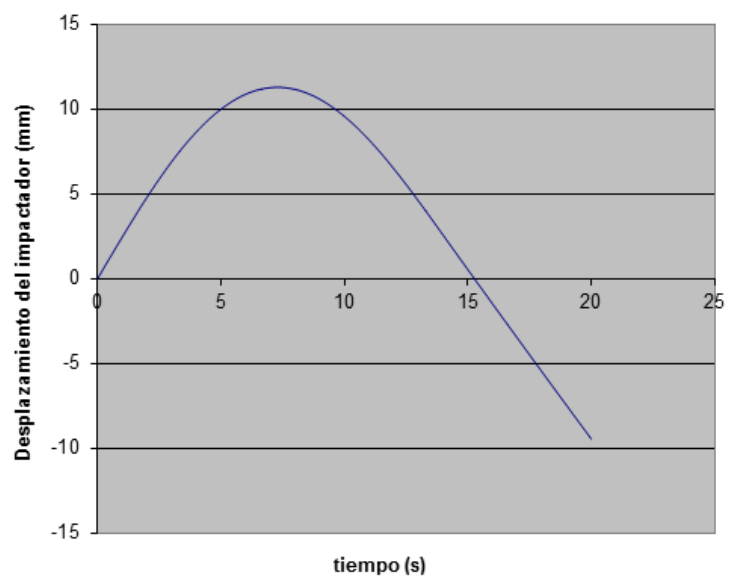


Figura 3.6: Desplazamiento del impactador frente a tiempo

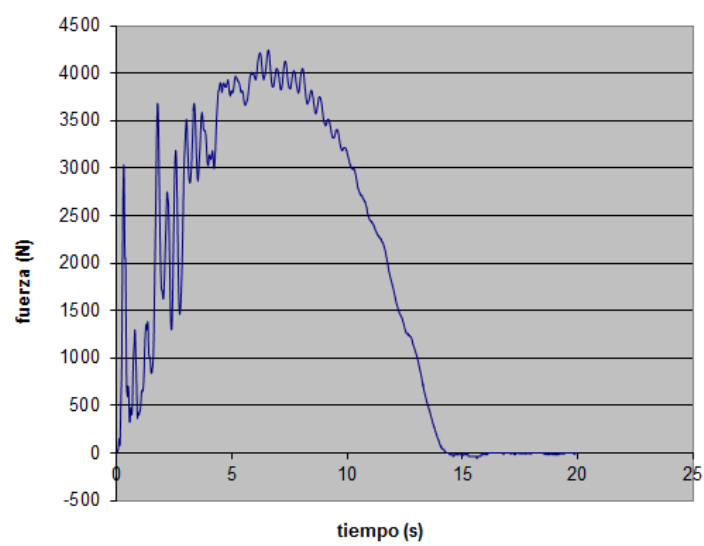


Figura 3.7: Fuerza aplicada frente a tiempo

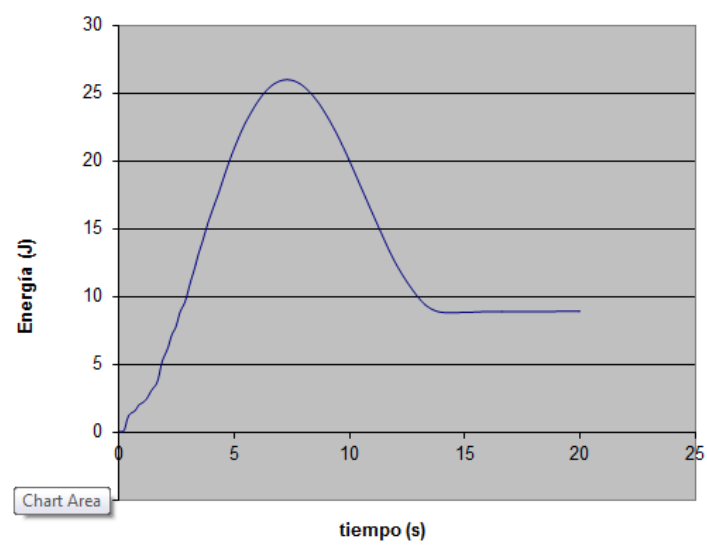


Figura 3.8: Energía frente a tiempo

Capítulo 4

Descripción de la solución

4.1. Problema inicial

El problema consiste en el cálculo del desplazamiento que produce una carga dinámica aplicada sobre el centro de una viga biapoyada tipo sándwich, es decir, la solución de un ensayo clásico de flexión a tres puntos como muestra la figura 4.1.

4.1.1. Caracterización del problema

Los datos de que se disponen son:

- Densidad de las pieles= $\rho_p = 1800Kg/m^3$
- Espesor de las pieles = $e_p = 3mm$
- Coeficiente de Poisson de las pieles= $\nu_p = 0,16$
- Módulo de Young de las pieles= $E_p = 10,1GPa$
- Módulo de cortadura de las pieles= $G_{12} = G_{23} = 12GPa$
- Densidad del núcleo = $\rho_n = 100Kg/m^3$

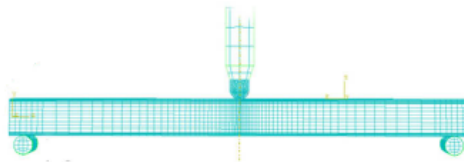


Figura 4.1: Ensayo de flexión a tres puntos

- Espesor del núcleo= $e_n = 30mm$
- Longitud total de la viga $L_{tot} = 480mm$
- Distancia entre apoyos= $L = 450mm$
- Profundidad de la viga= $B = 50mm$
- Punto de aplicación de la fuerza=Centro geométrico de la viga

También se dispone de los valores para fuerza aplicada en cada instante de tiempo a intervalos de 0,005 segundos, y de la deformación causada por ésta, así como la velocidad del indentador al atacar la viga, como se muestra en las figuras 4.2 y 4.3:

Contar con estos datos permitirá comprobar los resultados para asegurar la certeza de los mismos.

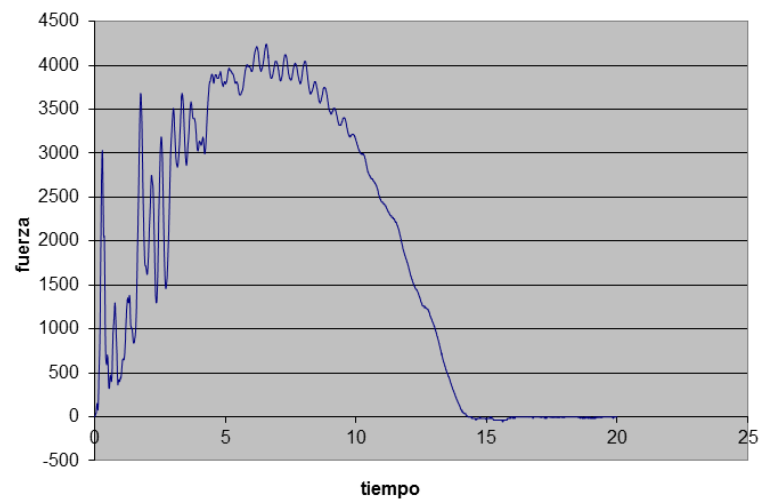


Figura 4.2: Esfuerzo registrado en el laboratorio

4.2. Solución del problema

4.2.1. Aplicando teorías estáticas

Inicialmente se deberán calcular las propiedades del material, se está tratando con una viga tipo sándwich, por tanto se deben emplear las simplificaciones para sándwich detalladas en el apartado 2.3 de este trabajo. Para el cálculo del $\langle EI \rangle$ equivalente se utilizará la fórmula:

$$\langle EI \rangle = 1/2 E_p \cdot B \cdot e_p (e_n + e_p)^2 \quad (4.1)$$

El siguiente paso es el de expresar la ley de momentos flectores para conocer su valor en el centro. Se trata de un problema sencillo. Inicialmente se tiene la disposición de apoyos y fuerza(fig 4.4):

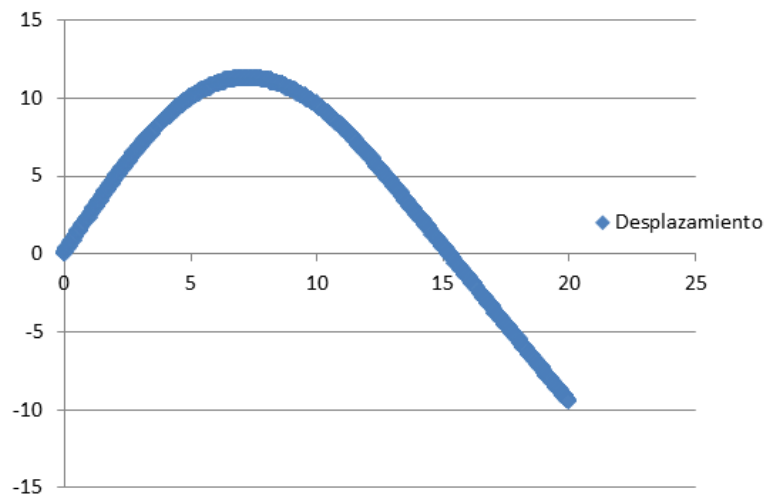


Figura 4.3: Desplazamiento registrado en el laboratorio

Las reacciones en los apoyos se calculan de forma inmediata, siendo estas iguales a la mitad de la fuerza aplicada, en vertical y sentido opuesto a la misma. Conocidas las reacciones, la distribución de momentos queda como se indica en la imagen 4.5: Donde el valor máximo es de $M = (F \cdot L)/4$, por tanto la flecha será, siguiendo el teorema de Mohr:

$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot \langle EI \rangle} \quad (4.2)$$

La fuerza aplicada no es constante, es decir, depende del tiempo $F(t)$, así que el cálculo de la respuesta será distinto para cada uno de los instantes de

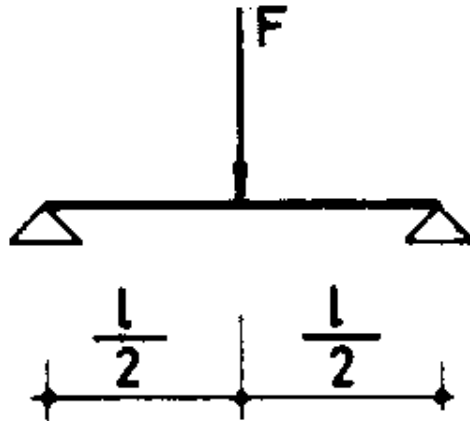


Figura 4.4: Esquema del ensayo de flexión

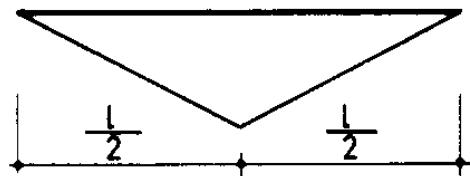


Figura 4.5: Distribución estática de momentos

tiempo. Para esto se implementa el siguiente código en matlab.

```
for i=2:n;

DespRDM(i) = F(i)*L^3/(48*EI);

end
```

Habiéndose implementado previamente en el código formas de leer los datos de fuerza y tiempo, así como un modo de calcular $\langle EI \rangle$ utilizando la fórmula previamente citada, se obtienen los siguientes resultados para deformación:

Como puede observarse, el desplazamiento máximo no excede los 10 milímetros, resultado que experimentalmente ha sido demostrado superior (en torno a los 11 milímetros), por tanto las teorías de Resistencia de Materiales presentan un error en torno al 20 %, inaceptablemente alto.

4.2.2. Aplicando teorías dinámicas

Para calcular una solución cercana a la real, es necesario aplicar teoría de vibraciones. Para hallar el desplazamiento del caso de viga biapoyada tratado pueden utilizarse diferentes fórmulas, en este caso se utilizará una que expresa el desplazamiento como función de los modos propios del elemento estructural (en este caso, una viga) y de la carga aplicada siendo ésta tipo impulso, es decir, no armónica. Ésta solución fue aportada por Gerardin.

$$\delta(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_m(\xi)}{\omega_m \cdot \Lambda_m \cdot L} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot (t - \tau)) d\tau \quad (4.3)$$

Donde:

- $\xi = x/L$ = desplazamiento adimensional.
- Λ_m = peso propio relacionado con el modo de vibración.
- $W_m(\xi)$ = modos propios de vibración de la viga.
- m = modo propio que se está calculando.
- ω_m = frecuencias propias de la viga.

Determinación de frecuencias y modos propios

Para el cálculo de frecuencias y modos propios se aplicara el principio de trabajos virtuales conjuntamente con la teoría del laminado. La ecuación diferencial que describe la oscilación libre de la probeta, planteada por Reddy, es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = I_0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \quad (4.4)$$

Donde:

- $I_0 = \int_{-H/2}^{H/2} \rho \cdot dz$
- $I_2 = \int_{-H/2}^{H/2} \rho \cdot z^2 \cdot dz$
- q = carga por unidad de longitud en dirección perpendicular al plano de la viga

- N_x = carga axial por unidad de anchura
- M_x = momento por unidad de anchura
- ρ = densidad

En la ecuación diferencial inicial se ignorarán los efectos de cortadura interlaminar para simplificar la solución y por ser estos negligibles con respecto al efecto del momento de inercia y la carga perpendicular. Al no existir cargas distribuidas ni axiales, el problema queda reducido a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{d_{11}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \quad (4.5)$$

Donde d_{11} es el primer término de la matriz de flexibilidad a flexión del laminado. Para el cálculo de frecuencias y modos propios se resolverá la siguiente ecuación.

$$w(x, t) = W(x) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (4.6)$$

Conocidas las siguientes condiciones de contorno forzadas por los apoyos:

$$x = 0, L \rightarrow w(x, t) = 0 \quad (4.7)$$

$$x = 0, L \rightarrow (\partial^2 w(x, t)) / \partial x^2 = 0$$

Las frecuencias propias resultan ser:

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{d_{11} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \quad (4.8)$$

Donde:

$$I_0 = \rho \cdot H \quad (4.9)$$

$$I_2 = \frac{\rho \cdot H^3}{12} \quad (4.10)$$

$$d_{11} = \frac{12}{H^3 \cdot E_1^f} \quad (4.11)$$

$$E_1^f = \frac{12 \cdot \langle EI \rangle}{B \cdot H^3} \quad (4.12)$$

Por tanto:

$$d_{11} = \frac{B}{\langle EI \rangle} \quad (4.13)$$

Siendo finalmente:

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{\frac{B \cdot \rho \cdot H}{\langle EI \rangle} \cdot \left(1 + \frac{H^2}{12} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \quad (4.14)$$

Y los modos propios:

$$W_m(x) = \text{sen}\left(\frac{m \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad (4.15)$$

Valor de Λ_m

Según la solución de Gerardin (1994), el valor para la variable Λ_m viene

dado por la siguiente ecuación:

$$\Lambda_m = \rho \cdot A \cdot \int_0^1 W_m^2(\xi) \cdot d\xi \quad (4.16)$$

Donde $A = H \cdot B$, siendo:

$$\blacksquare \text{ H}=(e_n + 2 \cdot e_p)$$

- B=anchura de la viga

La expresión que define ρ viene dada por la siguiente deducción:

$$\begin{aligned}
 \rho_{sandwich} \cdot V_{sandwich} &= 2 \cdot \rho_p \cdot V_p + \rho_n \cdot V_n \\
 V_p &= e_p \cdot B \cdot L \\
 V_n &= e_n \cdot B \cdot L \\
 V_{sandwich} &= B \cdot L \cdot (2 \cdot e_p + e_n) \\
 \rho_{sandwich} &= \frac{2 \cdot e_p \cdot \rho_p + \rho_n \cdot e_n}{2 \cdot e_p + e_n} \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Y $W_m(\xi) = \text{sen}(m \cdot \pi \cdot \xi)$, luego:

$$\int_0^1 W_m^2(\xi) \cdot d\xi = \frac{2 \cdot m \cdot \pi - \text{sen}(2 \cdot m \cdot \pi)}{4 \cdot m \cdot \pi} \tag{4.18}$$

Por tanto:

$$\Lambda_m = \rho \cdot (e_n + 2 \cdot e_p) \cdot B \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \pi - \text{sen}(2 \cdot m \cdot \pi)}{4 \cdot m \cdot \pi} \tag{4.19}$$

Integral de Duhamel

La integral de Duhamel responde a la siguiente formulación:

$$\int_0^t F(\tau) \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot (t - \tau)) d\tau \tag{4.20}$$

Donde:

- t =tiempo total.

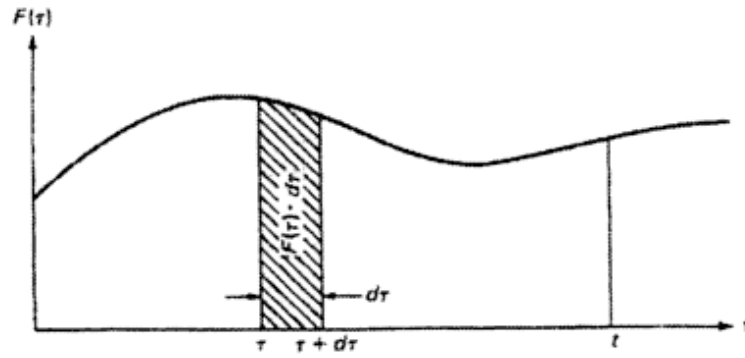


Figura 4.6: Función general de carga aproximada mediante impulsos

- τ =tiempo hasta el instante en que quiere calcularse la fuerza.
- $d\tau$ =intervalo de tiempo infinitesimal en el que la fuerza tiene el valor $F(\tau)$.

Gráficamente se puede ver en la figura 4.6

La solución de esta integral mediante métodos numéricos se encuentra detallada en el apartado referente a la teoría de vibraciones (2.3). En el código del programa tiene la siguiente forma:

```
for k=1:m_lim;

    modal(k) = (W(k)/(w(k)*A(k)*L));

    for i=2:n;

        AFundh(i) = Ffilt(i)*cos(w(k)*T(i));

        BFundh(i) = Ffilt(i)*sin(w(k)*T(i));

        C(i) = trapz(AFundh);

        D(i) = trapz(BFundh);
```

```

        Intdh(i) = C(i)*sin(w(k)*T(n))-D(i)*cos(w(k)*T(n));

        Despm(i) = modal(k)*Intdh(i);

        Desp(i) = Despm(i)+Despac(i);

        Despac(i) = Desp(i);

        Despfilt = filter(J,K,Desp);

    end

    DespMaxmod(k) = max(abs(Despfilt));

end

```

Donde el desplazamiento acumulado es la variable “Desp”.

4.2.3. Filtrado de señales y respuesta

El experimento llevado a cabo en el laboratorio del Departamento de Medios Continuos y Teoría de Estructuras registra una señal de fuerza aplicada en la que hay presentes numerosos picos, analizar directamente estos datos resulta ineficiente a la hora de obtener resultados, ya que no son del todo verídicos (las oscilaciones en los valores de fuerza aplicada son producto de vibraciones de la viga y el indentador, así como de las presentes en el ambiente y producto de deformaciones del propio material no relacionadas con su estructura). Por tanto es necesario aplicar un filtro de paso bajo a la señal, para lo que se utilizará la función “butter” de Matlab, que genera

filtros “Butterworth” de paso alto, bajo o de banda a elección del programador. El filtro de Butterworth es uno de los filtros electrónicos más básicos, diseñado para producir la respuesta más plana que sea posible hasta la frecuencia de corte. En otras palabras, la salida se mantiene constante casi hasta la frecuencia de corte, luego disminuye en función del número de polos del filtro. El filtro por tanto queda definido según las siguientes líneas de código:

```
[J,K] = butter(2,0.01);
```

Y es aplicado a las señales de desplazamiento dinámico, y fuerza aplicada según marcan las siguientes líneas de código:

```
Despfilt = filter(J,K,Desp);
```

```
Ffilt = filter(J,K,F);
```

Capítulo 5

Resultados

Una vez modelizadas las respuestas dinámica y estática mediante el programa, se analizarán los resultados que este arroja. Inicialmente se llevará a cabo un análisis de sensibilidad de la respuesta al número de modos, para seguidamente observar los resultados que el programa arroja frente a cálculos estáticos y dinámicos y observar las diferencias entre ambos. Seguidamente se realizará el estudio de la influencia de las fuerzas de inercia en la respuesta de la viga frente a cargas exteriores, variando el tiempo de aplicación de la fuerza y comparando los resultados obtenidos con los que se obtendrían aplicando ecuaciones que no consideren fuerzas de inercia (ecuaciones estáticas). Finalmente se observará el estudio paramétrico de la viga sándwich, visualizando como la respuesta dinámica varía al variar cada uno de los parámetros estructurales de la viga.

5.1. Análisis de la sensibilidad modal

En la gráfica de la figura 5.1 puede observarse como el desplazamiento registrado por el programa permanece constante a partir de analizar alrededor de 30 modos, de lo que puede deducirse que analizar más modos de vibración resultará únicamente en un desperdicio de recursos y tiempo.

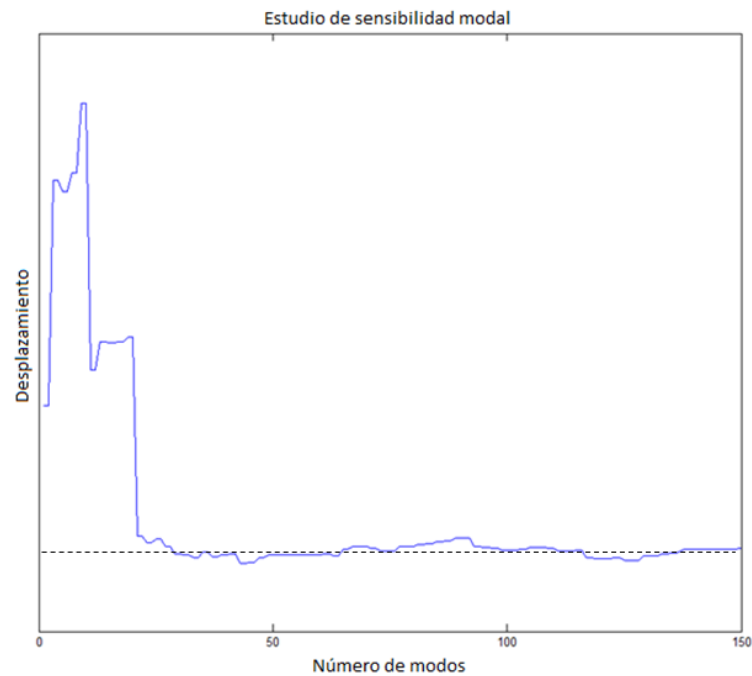


Figura 5.1: Estudio de sensibilidad modal

5.2. Estudio de la respuesta

En la gráfica que se muestra a continuación (figura 5.2) puede verse que al analizar el desplazamiento provocado según teorías estáticas (resistencia de materiales) por el esfuerzo registrado en el experimento llevado a cabo en la escuela, se obtienen valores de desplazamiento que son poco coherentes con la realidad, ya que oscilan alrededor de ciertos valores, lo que resulta poco creíble. Por tanto se tratarán los picos y valles de esta función como ruido provocado por defectos a la hora de medir la señal de fuerza aplicada. Para solucionar el problema se utilizará el filtro de paso bajo descrito en el apartado 4 de este trabajo.

En la siguiente gráfica (figura 5.3) se muestra el resultado tras la aplicación del filtro previamente mencionado:

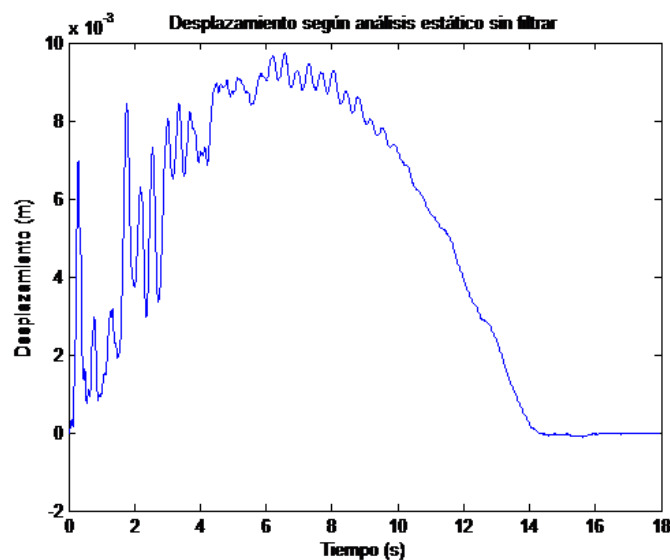


Figura 5.2: Desplazamiento según análisis estático sin postfiltrado

En ambos casos puede verse que el desplazamiento de la probeta es de menos de 10 milímetros. Al conocer los datos para el desplazamiento real de la misma, producto del ensayo de flexión a tres puntos realizado en la EPS (11.256 milímetros), podemos concluir que los resultados arrojados por las teorías de resistencia de materiales (análisis estático de desplazamientos) no son suficientemente exactos. Como puede observarse en la gráfica que se muestra a continuación (figura 5.4), la respuesta del programa correspondiente al análisis dinámico se ajusta mucho más a la respuesta real que los resultados arrojados por el análisis estático del problema:

A modo de prueba de la necesidad de aplicar un filtro al esfuerzo, se muestra en la siguiente figura (figura 5.5) el resultado para la deformación tras el análisis dinámico sin aplicar filtro alguno:

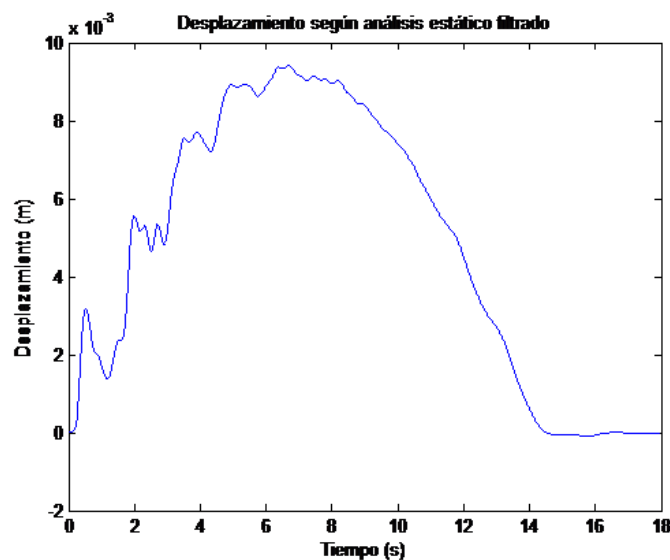


Figura 5.3: Desplazamiento según análisis estático filtrado

5.3. Relevancia del análisis dinámico

Los resultados obtenidos en el apartado anterior muestran que es necesario realizar un análisis dinámico del desplazamiento para obtener resultados

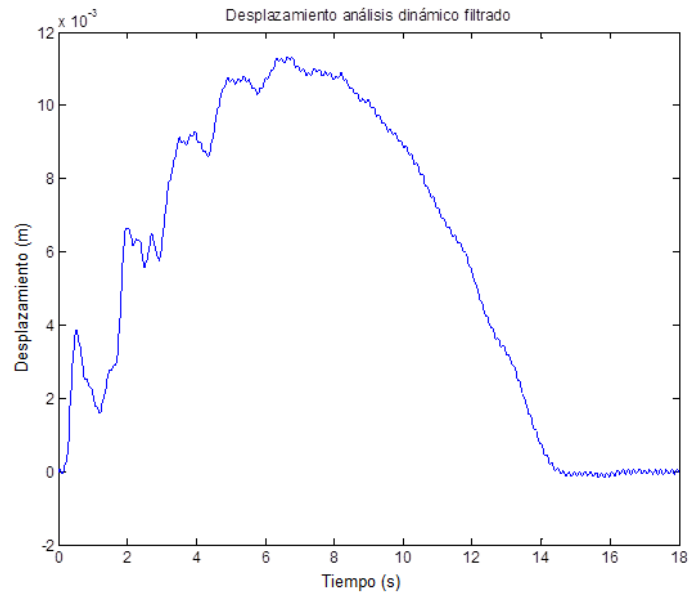


Figura 5.4: Desplazamiento según análisis dinámico filtrado

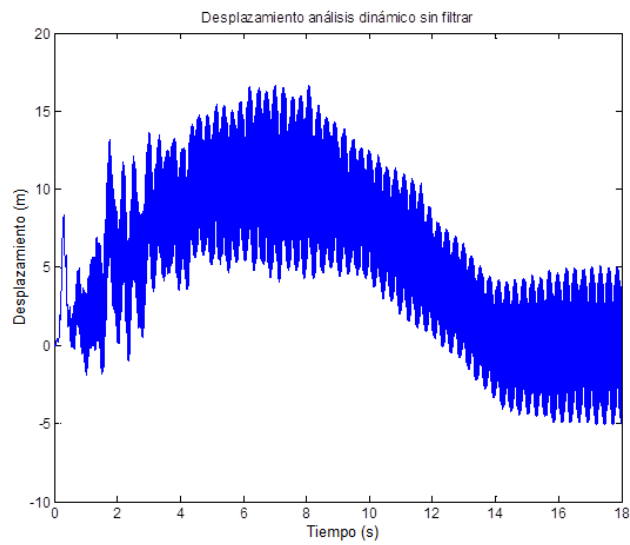


Figura 5.5: Desplazamiento según análisis dinámico sin postfiltrado

cercanos a los reales, sin embargo, es perfectamente conocido que de aplicar la carga en unos intervalos de tiempo lo suficientemente elevados, el estudio estático sería suficiente. Por tanto puede ser interesante comprobar para qué tiempos de aplicación de la fuerza deja de ser relevante el análisis dinámico. En la siguiente gráfica (figura 5.6) se muestra la relevancia de los parámetros previamente citados, para que en análisis futuros se tenga en cuenta el tiempo de aplicación de la fuerza, y en base a los resultados que arroja dicha gráfica se analice su respuesta de forma estática o dinámica, ahorrando la necesidad de comparar ambos resultados con el real, y de éste modo, reduciendo el tiempo necesario para realizar dichos estudios futuros.

Es importante anotar que para tiempos inferiores al de propagación trans-

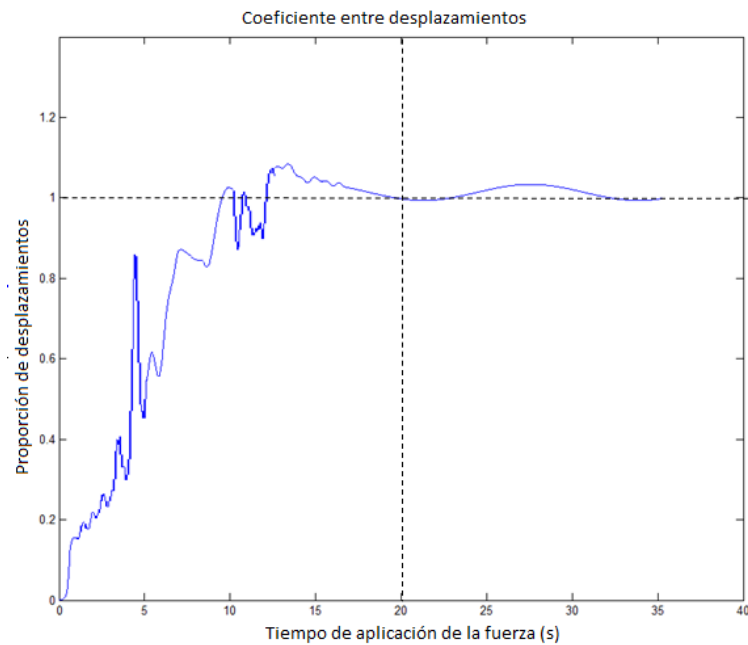


Figura 5.6: Comparación de resultados para desplazamiento según teorías estáticas y dinámicas

versal de ondas elásticas, el estudio no es ni dinámico ni estático, sino de impactos, y la respuesta no es analizable con ninguna de las teorías propuestas en éste trabajo.

5.4. Estudio paramétrico

Tras comprobar que los resultados del programa se asemejan a los reales, se procede a analizar la importancia de los parámetros de la viga aplicando un esfuerzo senoidal para evitar las posibles distorsiones del resultado producto de la necesidad de aplicar filtros a la señal. El análisis dinámico de la respuesta en desplazamientos para una fuerza senoidal de valor pico 1 kN aplicado en un tiempo igual a 14.285 segundos arroja los resultados mostrados en la siguiente gráfica (figura 5.7):

Partiendo de los valores base de parámetros estructurales de la viga de la probeta inicial. Se utilizará un tiempo de aplicación de la fuerza que haga relevante el análisis dinámico de la respuesta de la misma, ya que de

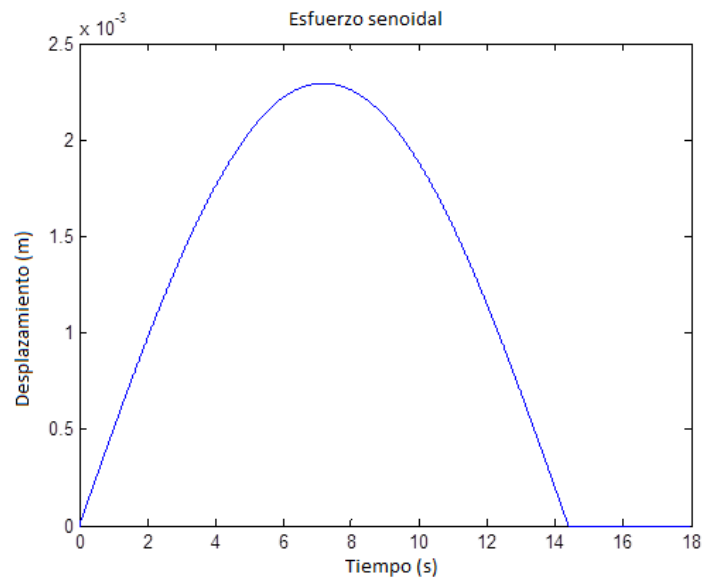


Figura 5.7: Desplazamiento provocado por fuerza seno

otro modo la respuesta ante vibraciones resulta irrelevante, y no se estaría cumpliendo con el propósito del trabajo. Para los análisis dimensionales de las distintas variables se partirá de la ecuación del desplazamiento dinámico (Eq. 4.3).

5.4.1. Espesor de las pieles

En la siguiente gráfica (figura 5.7), queda representa el valor máximo del desplazamiento en el centro de la probeta tras variar el espesor de las pieles en distintas proporciones del inicial.

Como era de esperar, la deformación de la probeta se ve reducida a medida que el espesor de las pieles aumenta, en proporción hiperbólica, como viene marcado por el siguiente análisis dimensional de la ecuación de la deforma-

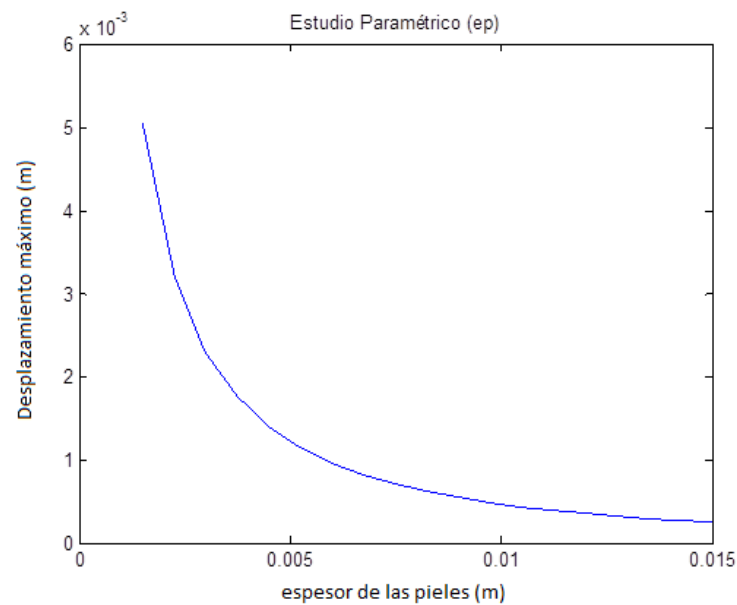


Figura 5.8: Sensibilidad del desplazamiento al espesor de las pieles

ción aplicada en este modelo: Eliminando todas las variables de la ecuación del desplazamiento que no dependen del espesor de las pieles, queda:

$$\delta = \frac{1}{(\omega_m \cdot A)} \quad (5.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{d_{11} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \\ A &= B \cdot H \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$H = e_n + 2 \cdot e_p$$

$$\langle EI \rangle = 1/2 E_p \cdot B \cdot e_p (e_n + e_p)^2$$

Por lo que la ecuación 5.1 escrita teniendo en cuenta sólo el espesor de las pieles queda de la forma:

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{e_p}{e_p^3} \cdot (1 + e_p^2)}}{e_p} = \frac{1}{e_p} \quad (5.3)$$

De modo que queda demostrada la dependencia racional del espesor de las pieles en el desplazamiento vertical provocado por un esfuerzo.

5.4.2. Propiedades de las pieles

Para este estudio se variará el valor del módulo de Young equivalente del laminado de las pieles en valores proporcionales al inicial como muestra gráfica de la figura 5.9.

Los resultados arrojados por la gráfica marcan una tendencia hiperbólica propia de la inversa de una función radical como era de esperar tras la realización del análisis dimensional de la respuesta dinámica en desplazamiento que se muestra a continuación:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{E_p}} \quad (5.4)$$

El único parámetro de la ecuación del desplazamiento en el que el módulo de Young aparente de las pieles se encuentra presente en el $\langle EI \rangle$ equivalente del sándwich, presente a su vez en el cálculo de frecuencias propias. El análisis realizado demuestra, por tanto, que el desplazamiento presenta dependencia en forma de inversa de función radical del módulo de Young aparente de las pieles.

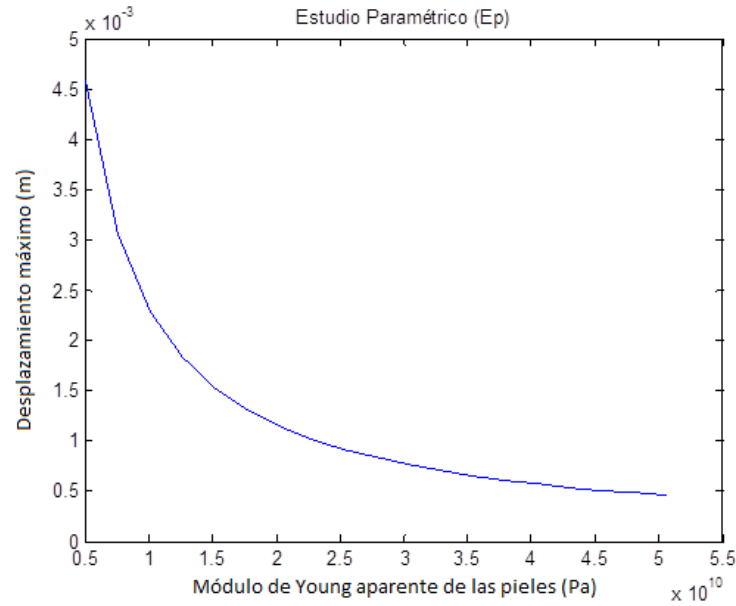


Figura 5.9: Evolución del desplazamiento en función del módulo de Young aparente de las pieles

5.4.3. Espesor del núcleo

El siguiente parámetro que se estudiará es el espesor del núcleo del sándwich, la variación de dicho parámetro aumentará la distancia entre las pieles, aumentando así las tensiones que éstas sufren. En la siguiente gráfica 5.10 puede verse como afecta dicho parámetro a la flecha máxima.

En éste caso el análisis dimensional es análogo al del espesor de las pieles, ya que los órdenes de magnitud se mantienen, aunque cambian los coeficientes que los preceden. Siguiendo el mismo razonamiento: Eliminando todas las variables de la ecuación del desplazamiento dinámico que no dependen del espesor de las pieles, queda:

$$\delta = \frac{1}{(\omega_m \cdot A)} \quad (5.5)$$

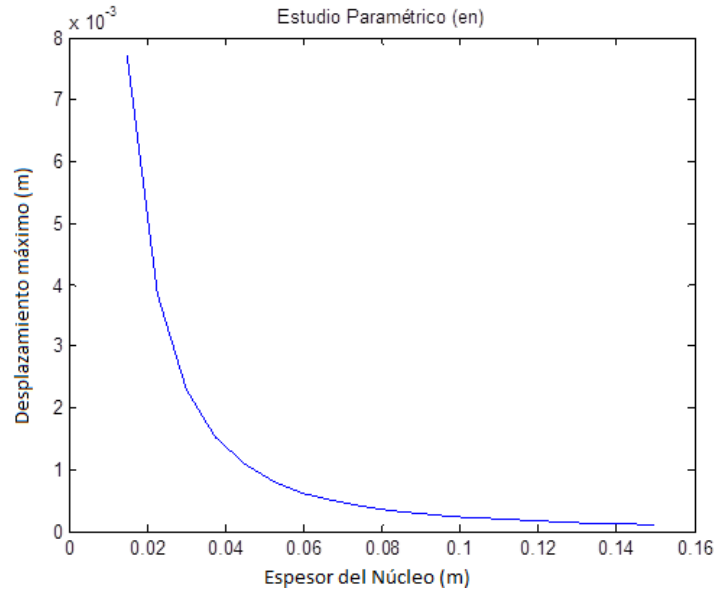


Figura 5.10: Comparación de desplazamientos en función del espesor del núcleo

Donde:

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{d_{11} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}}$$

$$A = B \cdot H \quad (5.6)$$

$$H = e_n + 2 \cdot e_p$$

$$\langle EI \rangle = 1/2 E_p \cdot B \cdot e_p (e_n + e_p)^2$$

Por lo que la ecuación 5.5 escrita teniendo en cuenta sólo el espesor de las pieles queda de la forma:

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{e_n}{e_n^3} \cdot (1 + e_n^2)}}{e_n} = \frac{1}{e_n} \quad (5.7)$$

Quedado demostrada la dependencia que presenta el desplazamiento en función del espesor del núcleo de forma racional.

5.4.4. Distancia entre apoyos

La distancia entre apoyos es un parámetro crítico del diseño, ya que el valor del momento flector máximo soportado por la viga depende directamente de él, la longitud de la viga va por tanto ligada a dicha distancia, ya que en este estudio se ha considerado irrelevante el peso propio de la misma más allá de los apoyos y el efecto que éste puede tener. En la figura 5.11 se muestra la relevancia de la distancia entre apoyos:

La dependencia de la distancia entre apoyos parece de forma exponencial y de exponente cuadrático, lo que se comprueba en el siguiente análisis dimen-

sional: La distancia entre apoyos “L” se encuentra presente en el cálculo de frecuencias propias, pero no en el de modos propios ni en el de la constante geométrica Λ_m :

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{d_{11} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \quad (5.8)$$

Sustituyendo la frecuencia propia por su dependencia de “L” y añadiendo la dependencia natural de la ecuación del desplazamiento dinámico queda un análisis dimensional de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{L^2}{\sqrt{\frac{1}{L^2}} \cdot L} = L^2 \quad (5.9)$$

Queda demostrada por tanto la dependencia cuadrática que presenta el desplazamiento vertical con respecto a la distancia entre apoyos, gráficamente visible en la representación presente al inicio de este apartado.

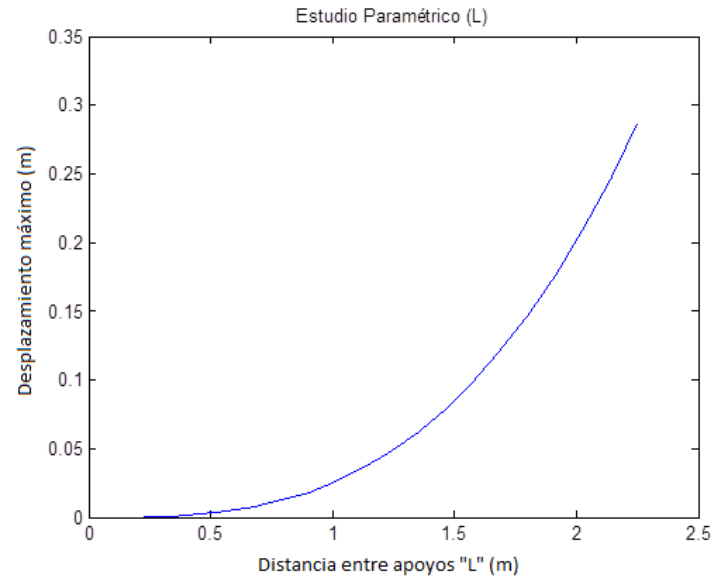


Figura 5.11: Relevancia de la distancia entre apoyos en cuanto a desplazamiento máximo

5.4.5. Anchura de la viga

En la gráfica 5.12 queda representado el efecto de la anchura de la viga en la flexión que ésta sufre, éste parámetro es uno de los más fáciles de variar, ya que simplemente exige un corte a mayor o menor distancia de la misma matriz. La gráfica presenta forma de función racional, lo que deja intuir que esa será la dependencia que el desplazamiento presenta con respecto a la anchura de la viga. Para respaldar los resultados obtenidos mediante el análisis dinámico de la deformación, se procede a realizar un análisis dimensional del parámetro en estudio partiendo de la ecuación inicial para el cálculo de deformaciones. En la ecuación del desplazamiento dinámico, el parámetro de anchura de la viga se encuentra presente en la frecuencia propia y en Λ_m , por tanto para realizar el análisis dimensional se plantearan

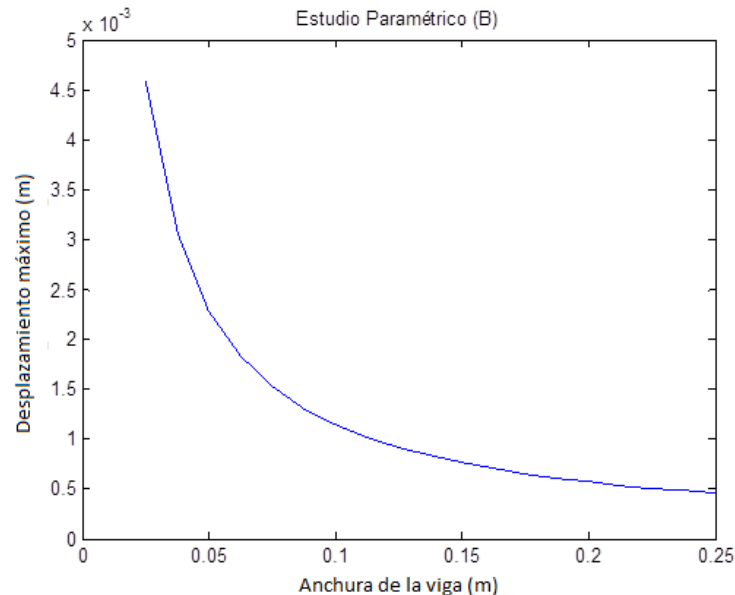


Figura 5.12: Estudio paramétrico de la influencia de la anchura de la viga

las definiciones de dichos parámetros:

$$\omega_m = \frac{\left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2}{\sqrt{d_{11} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_0} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right)^2\right)}} \quad (5.10)$$

Donde

$$\langle EI \rangle = 1/2 E_p \cdot B \cdot e_p (e_n + e_p)^2 \quad (5.11)$$

y

$$\Lambda_m = \rho \cdot (e_n + 2 \cdot e_p) \cdot B \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \pi - \text{sen}(2 \cdot m \cdot \pi)}{4 \cdot m \cdot \pi} \quad (5.12)$$

Separando la dependencia del ancho de la viga, queda el desplazamiento como:

$$\delta = \frac{1}{B \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{B}{B}}}} = \frac{1}{B} \quad (5.13)$$

Resultando en que se corrobora la inicialmente asumible dependencia racional del parámetro estudiado.

Capítulo 6

Conclusiones

Como conclusiones de éste trabajo de fin de grado se pueden citar las siguientes:

- Para modelizar numéricamente la respuesta en desplazamientos de una viga tipo sándwich ante esfuerzos del tipo de los estudiados en este trabajo de fin de grado, es necesario emplear probetas de elevada esbeltez para que sea posible despreciar los efectos de cortadura interlaminar.
- La señal de fuerza registrada en los ensayos de flexión en tres puntos presenta ruido, el cual dificulta el análisis del comportamiento mecánico de la viga. Ha sido por tanto necesario filtrar la señal de entrada para obtener resultados fiables.
- Tras realizar el análisis dinámico de la deformación, puede llegarse a la conclusión de que analizar la respuesta más allá de los 30 modos

de vibración resulta inútil, ya que el resultado no sufre cambios significativos. Ésto se debe a la homogeneidad del valor de los mismos al estar despreciando efectos de amortiguación, y al aumento progresivo del valor de las frecuencias propias.

- Según los resultados arrojados por la gráfica de la figura 5.6, puede concluirse que el estudio dinámico resulta de especial importancia, ya que es necesario para obtener valores exactos de la deformación o flecha sufrida por la viga. Las grandes oscilaciones en la proporción de desplazamientos son probablemente debidas a la naturaleza del impulso con el que han sido comparados, ya que éste es puramente experimental, presentando picos y valles impropios de un impulso estándar.
- También puede concluirse que a partir de los 20 segundos de aplicación de la fuerza, la respuesta estructural es la misma independientemente de si el análisis se realiza dinámica o estáticamente. La respuesta del material sin embargo no tiene por qué ser la misma, ya que ésta depende de la velocidad con que se aplique el impulso, y es función de propiedades del propio material. Éstos resultados son sólo concluyentes en el análisis estructural del problema, en el que no se han tenido en cuenta efectos de aplastamiento.

- Los resultados arrojados por el estudio paramétrico son los esperados, la relación entre el desplazamiento sufrido por la viga en su punto medio (desplazamiento máximo) y las distintas variables es la marcada dimensionalmente por la fórmula que define el mismo, lo que indica que la fórmula se encuentra correctamente implementada en el código. Cada uno de los resultados ha sido analizado independientemente en el apartado anterior, por tanto resultaría redundante repetir las conclusiones en él reflejadas.
- Como conclusión adicional, puede mentarse que para la solución del problema planteado y resuelto en este trabajo de fin de grado, el alumno trató inicialmente de resolverlo utilizando métodos discretos de análisis de desplazamiento debido a vibraciones, obteniendo valores poco satisfactorios.

Capítulo 7

Trabajo Futuro

Se proponen algunas líneas de trabajo que ampliarían la investigación desarrollada en este trabajo de fin de grado:

- Contrastar los resultados con más datos experimentales, cambiando las características de la viga ensayada y del esfuerzo aplicado. De este modo puede comprobarse si, como afirman los resultados obtenidos, el análisis dinámico resulta relevante para proporciones del tiempo característico del orden de las estudiadas en este trabajo de fin de grado.
- Modificar el modelo matemático para calcular las tensiones sufridas por pieles y núcleo. Ésta modificación no es tan sencilla como parece a priori, ya que los efectos de las fuerzas de inercia son relevantes. Para realizar éstos cálculos habría que partir del giro en la viga, definido como la derivada del desplazamiento, y volver a derivarlo para

calcular el momento flector presente en la viga. Éstas dos ecuaciones diferenciales añadirán inexactitud al cálculo, convirtiendo la misión de hallar resultados tensionales verídicos en tarea complicada.

- Simular el esfuerzo al que es sometida la viga partiendo de los datos de masa y velocidad de impacto del impactador, consiguiendo de este modo datos para fuerza aplicada más exactos y fiables que los registrados por la propia máquina.

Capítulo 8

Bibliografía

Sánchez Sáez, Sonia, Dra. *Comportamiento Mecánico a Flexión Y Tolerancia Al Daño De Materiales Compuestos De Fibra De Carbono Y Matriz Epioxi a Baja Temperatura.*” Thesis. Universidad Carlos III De Madrid, 2002. Print.

Vinson J. R., 1999, *The behaviour of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, Technomic, Lancaster.

L.A. Carlsson, G.A. Kardomateas., “*Structural and Failure Mechanics of Sandwich Composites*”, *Solid Mechanics and Its Applications*, Volume 121, G.M.L. Gladwell, Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada N2L 3G1, 2011.

Gerardin M. y Rixen D. (1994), *Mechanical Vibrations. Theory and Applications to Structural Dynamics*, Wiley.

Reddy, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and analysis*, CRC Press, 1997

I.M. Daniel y O. Ishai, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press. Chapter 5, Elastic behavior of multidirectional laminates.

Hyler, M.W., *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*, McGraw Hill, 1998, Chap 4. The plane-stress assumption, Chap. 6 Classical Lamination theory: The Kirchhoff Hypothesis.

López Puente, Jorge. *Apuntes De Dinámica De Estructuras.*” Aula Global 2: Universidad Carlos III De Madrid, n.d. Web. 10 Apr. 2012.

Samartín Pulián, Carlos. *Apuntes De Estructuras Ligeras.* Aula Global 2. Universidad Carlos III De Madrid, n.d. Web. 18 Apr. 2012.

Rao, Singiresu S. *Mechanical Vibrations.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1990. Print.

Garcia Moreno, F., *Vibraciones*, Madrid, Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Apuntes de vibraciones.

"*Material Ortótropo.*" Material Ortótropo. N.p., n.d. Web. 6 Feb. 2013.

Paz, Mario, and William E. Leigh. *Structural Dynamics: Theory and Computation.* Boston: Springer, 2004. Print.

Gibson, L. J. and Ashby, M. F., 1997, *Cellular Solids: structure and Properties*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Noor, A.K., W. Scott Burton y C.W. Bert, "*Computational Models for Sandwich Panels and Shells*," Applied Mechanical Reviews, Vol. 49, No. 3, Marzo de 1996, pp. 155-199.

Fairbairn, W., *An Account of the Construction of the Britannia and Conway Tubular Bridges*, John Weale, London, 1849.

Feichtinger, K. A., "*Test Methods and Performance of Structural Core Materials – 1. Static Properties*" 4th Annual ASM International/Engineering Society of Detroit – Advanced Composites Conference/Exposition, del 13 al 15 de septiembre de 1998.

Rheifrank, G.B. and W.A. Norman, "*Molded Glass Fiber Sandwich Fuselage for BT-15 Airplane*," Army Air Corps Technical Report No. 5159, 8 de noviembre de 1944.

Marguerre, K., "*The Optimum Buckling Load of a Flexibly Supported Plate Composed of Two Sheets Joined by a Light Weight Filler, When Under Longitudinal Compression*," Deutsche Vierteljahrsschrift für Literaturwissenschaft und Geistes Geschichte, D.V.L. (ZWB UM 1360/2) 28 de octubre de 1944, 11 p. 5 figs.

Hoff, N.J., "*Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*," N.A.C.A. Technical Note 2225, Noviembre de 1950.

Libove, C. y S.B. Batdorf, "*A General Small Deflection Theory for Sand-*

wich Plates,” NACA Report 899, Washington, D.C., 1948.

Miyano Y., Kanemitsu M., Kunio T., y Kuhn H.A. (1986), *Role of matrix resin on fracture strenghts of unidirectional CFRP*, Journal of Composite Materials, Vol.20, pp.520-538.

Winkel J.D. y Adams D.F. (1985), *Instrumented drop weight impact testing of crossply and fabric composites*, Composites, Vol. 16, No.4, pp. 268-278.

Wilson D.W. y Carlsson L.A. (1991), *Mechanical characterization of composite materials*, Physical Methofs of Chemistry, Vol. 7, Chapter 4, pp.139-221, John Wiley and Sons, Inc.

Flügge, W., “*Determination of Optimum Dimension Sandwich Panels*” La Recherche Aeronautique, No. 7, Jan./Feb. 1949.

Flügge, W., “*The Optimum Problem of the Sandwich Plate*,” Journal of Applied Mechanics, Vol 19, No. 1, Marzo de 1952, páginas 104-108.

Biljaard, P.P., “*Analysis of Elastic and Plastic Stability of Sandwich Plates by Method of Split Rigidities*,” Journal of the Aeronautical Sciences, Mayo de 1951, Diciembre de 1951, Julio de 1952.

Biljaard, P.P., “*On the Optimum Distribution of Material in Sandwich Plates Loaded in Their Plane*,” Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, Junio de 1952, ASME, Nueva York, 1952, páginas 373-380.

Erinjen, A. C., “*Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*,” Proceedings from the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, Nueva York, 1952, páginas 381-390.

March, H. W., “*Behavior of a Rectangular Sandwich Panel Under Uniform Lateral Load and Compressive Edge Load*,” Forest Products Laboratory Report 1583-C, Septiembre de 1952.

Ericksen, W. S., “*Supplement to Effects of Shear Deformation in the Core of a Flat Rectangular Sandwich Panel*,” Forest Products Laboratory Report 1583-C, Marzo de 1956.

March, H. W., “*Effects of Shear Deformation in the Core of a Flat Rectangular Sandwich Panel: 1, Buckling Under Compressive End Load: 2, Deflec-*

tion Under Uniform Transverse Load,” Forest Products Laboratory Report 1583, Agosto de 1955.

Raville, M.E., “*Deflection and Stresses in a Uniformly Loaded Simply Supported, Rectangular Sandwich Plate,*” Forest Products Laboratory Report 1847, 1955.

Anon., “*Materials, Properties and Design Criteria part II, Sandwich Construction for Aircraft,*” Military Handbook 23 (ANC-23), Department of the Air Force Research and Development Command; Department of the Navy, Bureau of Aeronautics; and the Department of Commerce, Civil Aeronautics Administration, 2nd Edition, 1955.

Gerard, G., *Minimum Weight Analysis of Compressive Structures*, New York University Press, New York, 1956.

Kaechele, L. E., “*Minimum Weight Design of Sandwich Panels,*” USAF. Project Rand Research Memorandum, RM 1895, AD-133011, Marzo de 1957.

Cheng, S., “*On the Theory of Bending of Sandwich Plates,*” Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, 1962.

Heath, W. G., “*Sandwich Construction, Part I: The Strength of Flat Sandwich Panels,*” Aircraft Engineering, Vol. 32, August 1960, páginas 186-191.

Heath, W. G., “*Sandwich Construction, Part II: The Optimum Design of Flat Sandwich Panels,*” Aircraft Engineering, Vol. 32, August 1960, páginas 230-235.

Plantema, F. J., *Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells*, John Wiley and Sons, New York, 1966.

Allen, H. G., *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

Vinson, J. R. and S. Shore, “*Bibliography on Methods of Structural Optimization of Flat Sandwich Panels,*” Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1082, 15 de Abril, 1965

Vinson, J. R. and S.Shore “*Methods of Structural Optimization for Flat Sandwich Panels,*” Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1083,

15 de Abril, 1965

Vinson, J. R. and S.Shore “*Design Procedures for the Structural Optimization for Flat Sandwich Panels,*” Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1084, 15 de Abril, 1965

Vinson, J. R. and S.Shore “*Structural Optimization of Corrugated Core and Web Core Sandwich Panels Subjected to Uniaxial Compression*” Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1109, Mayo, 1967.

Vinson, J. R. and S.Shore “*Structural Optimization of Flat Corrugated Core Sandwich Panels Under In-Plane Shear Loads and Combined Uniaxial Compression and In-Plane Shear Loads*” Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1110, Julio, 1967.

McCoy, T. T., J. R. Vinson and S.Shore, “*A Methods for Weight Optimization of Flat Truss Core Sandwich Panel Under Lateral Loads,*” Naval Air Engineering Center Report NAEC-ASC-1111, Julio 1967.

Hoff, N.J., *Monocoque, Sandwich and Composite Aerospace Structures*, Technomic Publishing Company, Lancaster, PA, 1986.

Sandwich Constructions 1-*Proceedings of the First International Conference on Sandwich Construction*, Stockholm, Sweden, Junio 19-21, 1989, Editores, K-A. Olsson y R. P. Reichard EMAS Publications, United Kingdom, 1989.

Sandwich Constructions 2-*Proceedings of the Second International Conference on Sandwich Construction*, Gainesville, Florida, Marzo 9-12, 1992, Editores, D. Weissman-Berman y K-A. Olsson, 2 Volúmenes, EMAS Publications, United Kingdom, 1989.

Sandwich Constructions 3-*Proceedings of the Second International Conference on Sandwich Construction*, Southampton, Great Britain, Editor, H.G. Allen, EMAS Publications, United Kingdom, 1996. 2 Volúmenes.

Ha, K. H., “*Finite Element and Sandwich Construction: A Critical Review,*” in Sandwich Constructions 1-*Proceedings of the First International Conference on Sandwich Construction*, Editors, K-A Olsson and R.P. Reichard, EMAS Publications, United Kingdom, 1989, páginas 69-84.

Bert, C.W., Part I, *Shock and Vibration Digest*, Vol. 23, 1991, páginas 3-14; Part II, *Shock and Vibration Digest*, Vol.23, 1991 páginas 19-21.

Zenkert, D., *An introduction to Sandwich Construction*, EMAS Publications, West Midlands, United Kingdom, 1989, páginas 69-84. Simitses, G.J., ed, "*Analysis and Design Issues for Modern Aerospace Vehicles-1997*" Proceedings of the ASME Aerospace Division, structures and Materials Committee, ASME-AD-Vol.55, New York, 1997.

J.R. Vinson, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Delaware, 1999-2013

Apéndice A

Anexo I : Código del programa

A.1. Definición de variables

.

Las variables precedidas del símbolo % preguntan al usuario por los valores de las variables, por velocidad de análisis dichas variables se encuentran especificadas debajo.

```
%--- DEFINICION DE VARIABLES ---
```

```
%exclname = input('introduzca el nombre del archivo de excel en  
que se encuentran los datos');
```

```
%exclpage = input('introduzca el nombre de la página del archivo  
de excel en que se encuentran los datos');
```

```
%Ep = input('introduzca el valor para el módulo de Young de la  
piel "Ep":');
```

```
%Tcol = input('introduzca la letra relativa a la columna del  
archivo de excel en que se encuentra el tiempo medido');
```

```
%Trow = input('introduzca el número relativo a la primera fila  
con una medición temporal'); de tiempo
```

```
%Fcol = input('introduzca la letra relativa a la columna de la  
hoja de excel en que se encuentran mediciones de fuerza aplicada');
```

```
%Frow = input('introduzca el número relativo a la primera fila
```

```

con una medición de fuerza');

%t = input('introduzca el tiempo en el que desea conocer
la respuesta dinámica');

%tf = input('si el tiempo en el que desea calcular la respuesta
es superior al tiempo de aplicación de la fuerza, por favor
intruduzca éste, si no, introduzca "0"');

%ti = input('intoduzca la duración de los intervalos de tiempo
en los que se toman medición de fuerza');

%F = xlsread(exclname,exclpage,FcolFrow:Fcoln);

%B = input('introduzca el valor para la anchura de la sección "B:');

%ep = input('introduzca el valor para el espesor de la piel "ep:');

%en = input('introduzca el valor para el espesor del núcleo "en:');

%mlim = input('introduzca el valor para el numero de modos que se
deseen calcular "m:');

Ep = 10.13*10^9;

B = 0.05;

ep = 0.003;

en = 0.03;

rop = 1800;

ron = 100;

L = 0.45;

t = 18;

```

```
tf = 14.285;  
  
ti = 0.005;  
  
mlim = 150;  
  
n = 3600;  
  
F = xlsread('SV2501','SV2501_#','E2:E4000');
```

A.2. Prelocalización de variables

Se lleva a cabo para velocidad de procesamiento del programa.

```
%--- PRELOCALIZACIÓN DE VARIABLES PARA VELOCIDAD DE PROCESAMIENTO ---
```

```
W = zeros(1,mlim);
```

```
w = zeros(1,mlim);
```

```
modal = zeros(1,mlim);
```

```
A = zeros(1,mlim);
```

```
dF = zeros(1,n);
```

```
dT = zeros(1,n);
```

```
dFfilt = zeros(1,n);
```

```
DespRDMfilt = zeros(1,n);
```

```
C = zeros(1,n);
```

```
D = zeros(1,n);
```

```
Intdh = zeros(1,n);
```

```
DespRDM = zeros(1,n);
```

```
Despac = zeros(1,n);
```

```
Despm = zeros(1,n);
```

```
Intdhu = zeros(1,n);
```

```
Despacu = zeros(1,n);
```

```
Despmu = zeros(1,n);

Despu = zeros(1,n);

DespMaxmodu = zeros(1,mlim);

Fundh = zeros(1,n);

tdh = zeros(1,n);

Desp = zeros(1,n);

BFundh = zeros(1,n);

AFundh = zeros(1,n);

DespMaxmod = zeros(1,mlim);

PropDesp = zeros(1,20);

Ti = zeros(1,20);

Tac = zeros(1,20);

T = zeros(1,n);

%F = zeros(1,n);

tip = zeros(1,20);

Comp = zeros(1,20);
```

A.3. Definición de esfuerzo seno para estudio paramétrico.

```
% --- ESFUERZO SENO ---  
  
for i=1:(0.8*n)  
  
    F(i) = 1000*sin(pi*(i/(0.8*n)));  
  
end  
  
for i=(0.8*n):n  
  
    F(i) = 0;  
  
end
```

A.3.1. Definición de variable adicional para estudio paramétrico.

en este caso trata la anchura de la viga B .

```
for j=1:20  
  
    B = tip(1)*0.5*j;  
  
    tip(j) = B;  
  
-TEXTO DEL PROGRAMA- con análisis de las soluciones, etc.  
  
    Comp(j) = max(abs(Despfilt));  
  
end
```


A.4. Cálculo de constantes.

```
F(3500:n) = 0;

F = F (1:n);

    for i=1:n-1

        T(i+1)=i*ti;

    end

%--- CÁLCULO DE LAS CONSTANTES DEL PROBLEMA ---

EI = (Ep*B*ep*(ep+en)^2)/2;

%x = input('introduzca la coordenada en x, siendo el valor 0 uno de

    los apoyos, para la que desea calcular la solución "x":');

x = L/2;

ro = (2*ep*rop+en*ron)/(2*ep+en);

xi = x/L;

H = en+2*ep;
```

A.5. Análisis dinámico de la solución.

Nótese que para el cálculo de la regla trapezoidal se han utilizado dos métodos, el integrado en matlab por un lado, mediante la función *trapz* y uno calculado manualmente.

```
%--- CÁLCULO DE VARIABLES RELATIVAS A MODOS DE VIBRACIÓN ---

for m=1:(2*m_lim)

    W(m) = sin(m*pi*xi);

    %*(1+H^2/12*(m*pi/L)^2)

    w(m) = ((m*pi/L)^2/((ro*H*B/(EI)*(1+H^2/12*(m*pi/L)^2))^0.5));

    A(m) = ro*H*B*((2*pi*m-sin(2*m*pi))/(4*m*pi));

end

%--- APLICACIÓN DEL FILTRO A LA FUERZA ---

[J,K] = butter(2,0.01);

Ffilt = filter(J,K,F);

%--- CÁLCULO DE LA ECUACION DE GERARDIN ---

for k=1:m_lim;

    modal(k) = (W(k)/(w(k)*A(k)*L));

    %modal(k) = (2/(w(2*k-1)*ro*H*B*L));

    for i=2:n;

        %dFfilt(i)=Ffilt(i)-Ffilt(i-1);
```

```

%dT(i)=T(i)-T(i-1);

%C(i) = C(i-1)+(Ffilt(i-1)-T(i-1)*dFfilt(i)/dT(i))*
(sin(w(k)*T(i))-sin(w(k)*T(i-1)))/w(k)+dFfilt/(w(k)^2*dT)*
(cos(w(k)*T(i))-cos(w(k)*T(i-1)))+(w(k)*(T(i)*sin(w(k)*T(i))
-T(i-1)*sin(w(k)*T(i-1)))));

%D(i) = D(i-1)+(Ffilt(i-1)-T(i-1)*dFfilt(i)/dT(i))
*(cos(w(k)*T(i-1))-cos(w(k)*T(i)))/w(k)+dFfilt/(w(k)^2*dT)
*(sin(w(k)*T(i))-sin(w(k)*T(i-1))-(w(k)*(T(i)*cos(w(k)*T(i))
-T(i-1)*cos(w(k)*T(i-1)))));

%Intdh(i) = (C(i)*sin(w(k)*T(i))-D(i)*cos(w(k)*T(i)));

AFundh(i) = Ffilt(i)*cos(w(k)*T(i));

BFundh(i) = Ffilt(i)*sin(w(k)*T(i));

C(i) = trapz(AFundh);

D(i) = trapz(BFundh);

Intdh(i) = C(i)*sin(w(k)*T(i))-D(i)*cos(w(k)*T(i));

Despm(i) = modal(k)*Intdh(i);

Desp(i) = Despm(i)+Despac(i);

Despac(i) = Desp(i);

Despfilt = filter(J,K,Desp);

Intdhu(i) = ti/2*((sin(w(k)*T(i)))*(T(i-1)+F(i-1)*cos(w(k)
*(T(i-1)))+F(i)*cos(w(k)*T(i)))-(cos(w(k)*T(i)))*(T(i-1)+
F(i-1)*sin(w(k)*(T(i-1)))+F(i)*sin(w(k)*T(i))));

```

```

    %Intdhu(i) = F(i)*cos(w(k)*(T(n)-T(i))/w(k));

    Despmu(i) = modal(k)*Intdhu(i);

    Despu(i) = Despmu(i)+Despacu(i);

    Despacu(i) = Despu(i);

    Despufilt = filter(J,K,Despu);

end

DespMaxmod(k) = max(abs(Despfilt));

DespMaxmodu(k) = max(abs(Despufilt));

end

```

A.6. Análisis estático de la solución

```
%--- CÁLCULO DEL PROBLEMA ESTÁTICO ---  
  
    for i=2:n;  
  
        DespRDMfilt(i) = Ffilt(i)*L^3/(48*EI);  
  
        DespRDM(i) = F(i)*L^3/(48*EI);  
  
    end
```

A.6.1. Representación de gráficas.

```
% --- REPRESENTACIÓN DE GRÁFICAS ---  
  
plot(T,DespRDMfilt);  
  
title('Desplazamiento según análisis estático filtrado');  
  
xlabel('Tiempo (s)');  
  
ylabel('Desplazamiento (m)');  
  
subplot(221),plot(DespMaxmod);  
  
subplot(222),plot(T,Despufilt);  
  
subplot(223),plot(T,DespRDMfilt);  
  
subplot(224),plot(T,Despfilt);
```

Apéndice B

Anexo II : Summary

Como es requerido por la norma del trabajo de fin de grado, en éste anexo se adjunta un resumen en inglés del mismo:

This degree project studies the behaviour of a doubly supported sandwich beam subjected to a dynamic load. To do so, the student utilizes an analytic model that uses the concepts needed, which are the laminate theories, the sandwich simplifications, and the vibration theories. Using these theories, it is possible to analyze the flexural behaviour of the beam on any of its length points, always accounting for the effects of inertial forces.

This analytic model has been written using Matlab, this facilitates the labour of studying the effect of different parameters, as well as making widely faster any subsequent analysis of the structure.

The reason to study the problem of a doubly supported sandwich beam is that there is experimental data available from studies carried out in the

laboratory of the Department of Continuous Media and Structural Theory of the Universidad Carlos III de Madrid. And, having this data, it has been easy to prove right or wrong the results obtained by analytical means.

This dynamic three-point bending tests were performed using a drop-weight tower CEAST Fractovist 6785, instrumented to record the force exerted by the impactor. Sandwich beams of rectangular cross-section (50mm width and 36mm thickness) and 480 mm length were tested, using a span of 450 mm and different impact energies between 25 and 75 J. The impactor was a charpy-nose of 20mm with 7.97 kg of mass. The tests were recoded by a high-speed video camera, measuring the impact velocity, post-ricochet velocity, and the displacement in both face sheets each 0.005 seconds.

Once the analytical model was proven right, some studies were carried out:

- An analysis of the relevance of the vibration modes with respect to the deformational response of the structure. This will be used to determine the number of modes on top of which further analysis results useless.
- An analysis of the influence of inertial forces on the beam response to dynamic loads. This will be carried out varying the times of application for the force, and comparing the results that both static and dynamic theories show.

- A parametric study to determine the importance of each one of the variables of the beam, such as its width, height of each of its components, etcetera.

The conclusions obtained from the results are the following:

- To numerically analyze the displacement response on a sandwich beam subject to dynamic loading, it's necessary to utilize beams of a very much wider length than the thickness of its face-sheets, else, the effects of interlaminar shearing cannot be neglected.
- The signal for the loading registered on the lab tests is stained with lots of noise, to clean this noise it's necessary to apply a filter to its values.
- After finishing the analytical model, it can be concluded that analyzing more than 30 modes of vibration results on a waste of resources, since the displacement response does not vary on a noticeable manner. This is due to the value for the vibration modes remaining steady while the value for the resonance frequencies increases exponentially.
- Watching the results on the relevance analysis for the dynamic and static theories, one can conclude that analyzing dynamically the problem while dynamic loads with applied force time superior to 20 seconds

is not necessary, since the results do not vary compared to the ones exerted by static theories. It's necessary to point out that effects due to changes in the material are not being taken into account.

- It's important to take into account the effects of the inertial forces, as proven on the results of this project.
- The parametric study shows no surprising results, every parameter holds the importance that the equation would initially suggest. making their importance somewhat predictable.
- Another conclusion that the student reached is that of the importance of applying continuous theories, since at the beginning of this project, he tried to solve the problem using discreet methods, obtaining disappointing results.